

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

MITWIRKUNG VON L. COLLATZ · H. GÖRTLER · J. HEINHOLD · K. KLOTTER
MARGUERRE · H. NEUBER · L. SCHMETTERER · K. SCHRÖDER · H. SCHUBERT
TOLLMIEN · H. UNGER UND C. WEBER · HERAUSGEGEBEN VON H. HEINRICH, DRESDEN

Bd. 40

SEITE T 1—T 156

SONDERHEFT

1960

AUS DEM INHALT:

Vorträge der Wissenschaftlichen Jahrestagung
der Gesellschaft für Angewandte Mathematik
und Mechanik vom 19. bis 23. April 1960 in
Freiberg (Sachsen)



AKADEMIE-VERLAG G M B H · B E R L I N

INHALT:

Berichte

- H. Heinrich:** Wissenschaftliche Jahrestagung der Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik in Freiberg (Sachsen) (19.—23. April 1960) T1
- K. Wieghardt:** Bericht über die Tätigkeit der GAMM im vergangenen Jahr und Ergebnisse der ordentlichen Hauptversammlung in Freiberg (Sachsen) am 22. April 1960 T2

Vorträge

A. Angewandte Mathematik

- W. Bollermann:** Ein Iterationsverfahren mit Fehlerabschätzung bei linearen Integralgleichungen T6
- N. Forbat et A. Huaux:** Sur une nouvelle application de la méthode de Rayleigh T9
- G. Hämmerlin:** Ein Verfahren zur numerischen Behandlung von homogenen Integralgleichungen 2. Art mit Fehlerabschätzung T12
- K. Jörgens:** Fehlerabschätzung für die numerische Inversion von Matrizen T15
- H. Kadner:** Optimale Kollokation für lineare Integralgleichungen 2. Art T16
- R. Krawczyk:** Defektaberschätzungen T18
- U. Kulisch:** Konforme Abbildung durch die Lösungen der Differentialgleichung der Tschebyschewschen Polynome T20
- K. Nickel:** Eine Erweiterung des Nagumo-Westphalschen Lemmas für parabolische Differentialgleichungen T21
- J. Nitsche:** Fehlerabschätzungen bei der numerischen Integration elliptischer Differentialgleichungen T22
- M. Schoch:** Lösung einer Volterraschen Integralgleichung zweiter Art und die Integration gewisser linearer Differentialgleichungen T22
- W. Schöne:** Ein Beitrag zur Synthese des Dreistabgetriebes T24
- J. Schröder:** Funktionalanalytische Herleitung von Fehlerabschätzungen und ihre praktische Durchführung auf Rechenanlagen T27
- H. Wenzel:** Funktionentheoretische Behandlung eines Schubbeulproblems bei Rechteckplatten T37

B. Rechentchnik

- F. R. Güntsch und W. Händler:** Zur systematischen Behandlung von modernen Steuerungsaufgaben in digitalen Rechenanlagen T39
- J. Heinhold:** Der elektronische Analogrechner und seine Verwendung in der Praktischen Mathematik T44
- W. Hoffmann und H. E. Müller:** Die quasi-logarithmischen Eigenschaften des Restklassensystems T61
- L. Kalmár:** Über einen Rechenautomaten, der eine mathematische Sprache versteht T64
- W. Kämmerer:** Ziffernrechenautomat mit Programmierung nach mathematischem Formelbild T66
- I. O. Kerner:** Automatisches Programmieren auf ZRA 1 T76
- J. Knittel und K. Zeller:** Rundfreies Rechnen mittels Kongruenzen T79
- G. Patzelt:** Ein für elektronische Digitalrechner geeignetes Iterationsverfahren zur Lösung eines Randwertproblems T80
- H. Rohleder:** Ein Verfahren zur Ermittlung optimaler Reihenparallelschaltungen T81
- F. Schwenkel und K. Zeller:** Adressierprogramme T81
- K.-H. Werler:** Ein Automat mit gekennzeichneten Worten T83

C. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

- K. Jacobs:** Einführung in die Informationstheorie T86
- W. Richter:** Einige neuere Untersuchungen aus der Theorie der Wahrscheinlichkeiten großer Abweichungen T95

Seite

- G. Schulz:** Die mathematischen Grundlagen der Monte-Carlo-Methode T96
- H. Störmer:** Über einen Exponentialverteilungstest T96
- D. Mechanik**
- N. Forbat:** Vergleich des theoretischen und experimentellen Verhaltens eines nichtlinearen mechanischen Verbandes T97
- R. Kawai:** Die Darstellung nichtlinearer Schwingungen ohne Dämpfung in einer verallgemeinerten Phasenebene und Anwendung auf die Foucaultsche Regel für einen astatisch gelagerten, symmetrischen Kardankreisel... T100
- H. Neuber:** Zur Dynamik des Preßlufthammers T108
- D. Rašković:** Small Damped Vibrations of Homogeneous Torsional System with Double Static Constraints T108
- J. Rasquiné:** Very Low Frequency Vibration Recorder... T110
- R. Reissig:** Stabilitätskriterien für ein lineares System mit veränderlichen Parametern T112
- P. Rózsa:** Über die Verallgemeinerung einer Routhschen Erscheinung T114
- P. Seibert:** Über den Einfluß von Störungskräften auf Beschränktheits- und Stabilitätseigenschaften dynamischer Systeme T115
- J. Zawadzki:** Beitrag zur Theorie der anisotropen Belastung der Polymeren T117
- E. Elastizitätslehre**
- N. Gorbatov und J. Valenta:** Zur Theorie der drehsymmetrisch belasteten Kreiszylinderschalen beliebiger Wandstärke T119
- Th. Lehmann:** Einige Bemerkungen zur Beschreibung mechanischer Vorgänge in einem Kontinuum T121
- Kh. Nasitá:** Greensche Funktionen für dünne Kreislatten T122
- G. Rieder:** Eigenspannungen und magnetisches Verhalten T123
- H. Schwieger und G. Haberland:** Spannungsoptische Untersuchungen schiefwinkliger Platten T128
- G. Sonntag:** Beitrag zur inhomogenen Halbebene T129
- F. Strömungslehre**
- W. Albring:** Einige Strömungsprobleme der Turbomaschinen T132
- M. Fiebig:** Weiterentwicklung der ähnlichen Grenzschichten bei gestörtem Profil T132
- M. Hoffmeister:** Berechnung der Strömung durch ein radiales Laufrad unter Berücksichtigung der veränderlichen Breite der Schaufeln T135
- K. Kirchgässner:** Das Rayleigh-Syngesche Stabilitätskriterium für stationäre und instationäre zähe Strömungen T137
- H.-J. Mascheck:** Zur Berechnung der Druckverteilung an Strahlflügelprofilen T140
- K. Nickel:** Über dreidimensionale Grenzschichten an Ringflügeln T142
- K. Oswatitsch und J. Zierep:** Das Problem des senkrechten Stoßes an einer gekrümmten Wand T143
- S. Pivko:** Über den Einfluß eines aus der Hinterkante ausfließenden Strahls auf die aerodynamischen Eigenschaften dünner Flügelprofile T145
- J. Poláček:** Zur Berechnung der Potentialströmung für Schaufelgitter mit stark gewölbten dünnen Profilen T146
- D. Rues:** Der Einfluß ebener und rotationssymmetrischer Körper auf stromaufwärts liegende senkrechte Stöße... T148
- E. Schincke:** Die Berechnung der Grenzlinien ebener transonischer Profilströmungen T149
- C. Schreck:** Beitrag zum Problem der Verzweigungsströmung an einem Kanal mit seitlichen Schlitten T152
- J. Zierep:** Eine neuartige Konvektionsströmung T154

Seiten

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 40

Sonderheft

Wissenschaftliche Jahrestagung der Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik in Freiberg (Sachsen) (19.–23. April 1960)

Der Einladung der Freiburger Bergakademie folgend veranstaltete die Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik (GAMM) ihre diesjährige wissenschaftliche Tagung in der Zeit vom 19.–23. April in Freiberg (Sachsen). Die örtliche Tagesleitung hatte Herr Prof. Dr. Kneschke inne, wirksam unterstützt durch die Herren Prof. Dr. Rüdiger und Prof. Dr. Rühls und weitere Mitarbeiter. Es hatten sich 590 Tagungsteilnehmer gemeldet, außer aus beiden Teilen Deutschlands aus Belgien, der ČSR, England, Frankreich, Italien, Japan, Jugoslawien, Norwegen, Polen, der Schweiz, der UdSSR, Ungarn und den USA.

Nach einem ausgezeichnet besuchten Begrüßungsabend am Dienstag wurde die Tagung am Mittwoch um 9.00 Uhr durch den Vorsitzenden der GAMM, Herrn Prof. Dr. Sauer, München, eröffnet. Als Hausherr begrüßte der Rektor der Bergakademie, Prof. Dr. Oelsner, die Teilnehmer; er überbrachte außerdem die Grüße und Wünsche des Staatssekretärs für das Hoch- und Fachschulwesen der DDR.

Der wissenschaftliche Teil der Tagung spielte sich in der nun schon mehrfach bewährten Art ab. Die Sitzungen der einzelnen Sektionen Angewandte Mathematik, Mechanik, Strömungslehre, Rechenmaschinen und Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik fanden nur an den Nachmittagen statt. Die Vormittage waren den größeren Übersichtsvorträgen vorbehalten, zu denen die Gesellschaft die Vortragenden besonders eingeladen hatte. Es fanden folgende Hauptvorträge statt:

J. Schröder, Hamburg:	Funktionalanalytische Herleitung von Fehlerabschätzungen und ihre praktische Durchführung in Rechenanlagen
J. Heinhold, München:	Der elektronische Analogrechner und seine Verwendung in der praktischen Mathematik
W. Kämmerer, Jena:	Ziffernrechnenautomat mit Programmierung nach mathematischem Formelbild
G. Schulz, Stuttgart:	Die mathematischen Grundlagen der Monte-Carlo-Methode
B. Gnedenko, Kiew:	Über einige Aspekte der Entwicklung der Massenbedienung (Queuing-Theorie) (vorgetragen von W. Richter, Dresden)
K. Jacobs, Göttingen:	Einführung in die Informationstheorie
W. Zerna, Hannover:	Zur neueren Entwicklung der Schalentheorie
F. L. Bauer, Mainz:	Bericht über ALGOL 60
W. Albring, Dresden:	Einige Strömungsprobleme der Turbomaschinen

Daß den zu Hauptvorträgen eingeladenen Herren Prof. Gnedenko, Kiew, und Prof. Frankl, Naltschik, nicht die Möglichkeit gegeben war, an der Tagung teilzunehmen, und daher der Vortrag des ersteren nur verlesen werden konnte und der Vortrag des zweiten ausfallen mußte, wurde allseits lebhaft bedauert.

In den Sektionssitzungen wurden insgesamt 55 Kurzvorträge gehalten, die sich auch in diesem Jahr wieder auf hohem wissenschaftlichen Niveau bewegten.

Über die vom Vorstand in einer besonderen Sitzung vorbereitete, am Freitagvormittag abgehaltene Mitgliederversammlung und die dort abgegebenen Berichte und gefaßten Beschlüsse unterrichtet der anschließende Tätigkeitsbericht der GAMM.

Mit nicht zu übertreffender Umsicht und Großzügigkeit hat die Tagungsleitung nicht nur für eine hervorragende Unterbringung der Gäste gesorgt, sondern auch ein inhaltsreiches Programm geselliger und künstlerischer Veranstaltungen vorbereitet und durchgeführt. Am Mittwochabend

waren die Vorstandsmitglieder der GAMM, die ausländischen Gäste und die Vertreter der mathematischen Institute der deutschen Universitäten und Technischen Hochschulen vom Rektor der Bergakademie zu einem Empfang mit Abendessen geladen. Der Donnerstagabend vereinigte mehr als 500 Gäste im Klubhaus der Akademie zu einem geselligen Abend mit Darbietungen von Studenten und Studentinnen der Dresdener Hochschule für Musik. Am Freitag wurde ein Symphoniekonzert der Dresdener Philharmonie unter der Leitung von Prof. Bongartz mit der Münchener Geigerin Edith Peinemann als Solistin geboten. Außerdem war den Teilnehmern Gelegenheit zu Grubenbefahrungen, zur Besichtigung der bedeutenden Mineraliensammlung der Bergakademie, zu einer Exkursion zur Dresdener Forschungs- und Versuchsanstalt für Strömungsmaschinen, zu einer Sonderfahrt zum VEB Carl Zeiß Jena und zu Ausflügen in die Umgebung gegeben. Den Abschluß bildete für viele am Sonnabend ein Ausflug nach Meißen zur Albrechtsburg und nach Dresden zum Zwinger und zum Luisenhof.

Für die hervorragende Vorbereitung und Durchführung dieser schönen Tagung gebührt dem Tagungsleiter und seinem Mitarbeiterstab der wärmste Dank der Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik und aller Tagungsteilnehmer. Es soll dabei nicht die außerordentlich großzügige Förderung der Tagung durch das Staatssekretariat für das Hoch- und Fachschulwesen verschwiegen und auch diesem herzlicher Dank ausgesprochen werden.

H. Heinrich

Bericht über die Tätigkeit der GAMM im vergangenen Jahr und Ergebnisse der ordentlichen Hauptversammlung in Freiberg (Sachsen) am 22. April 1960

A. Tätigkeit der Ausschüsse

I. Ausschuß für die Ausbildung der Diplom-Mathematiker

Leiter: Dir. Dr. Ing. A. Siemens, Erlangen.

Auf einer geplanten Sitzung im Juli 1960 sollen Probleme der Mathematiker in der Industrie erörtert werden.

II. Ausschuß für die Ausbildung mathematisch-technischer Assistenten

Leiter: Prof. Dr. F. L. Bauer, Mainz

Die Konstituierung des Ausschusses ist vorgenommen. Als notwendige Voraussetzung für eine Diskussion wurde die Sammlung und Sichtung des vorliegenden Materials vorgenommen.

Bei einer Besprechung der in Freiberg anwesenden Mitglieder des Ausschusses wurde über einige Ausgangspunkte der weiteren Arbeit des Ausschusses diskutiert und Übereinstimmung erzielt.

III. Fachausschuß für Programmieren

Leiter: Prof. Dr. J. Heinhold, München

Die beiden Hauptaufgaben des Ausschusses

a) eine Terminologie der Programmierung zu erarbeiten,

b) einen Algorithmus des Programmierens zu entwickeln,

wurden im Berichtsjahr energisch weiter bearbeitet.

Ein kleines Wörterbuch „Fachbegriffe der Programmierungstechnik“ konnte als Beitrag unseres Ausschusses zur ICIP-Tagung in Paris im Juni vergangenen Jahres mit Unterstützung der Deutschen Forschungsgemeinschaft und des Stifterverbandes für die Deutsche Wissenschaft erscheinen. Das Bändchen enthält neben der deutschen Erklärung auch die in der englischen, französischen, holländischen, schwedischen und russischen Sprache gebräuchlichen Bezeichnungen. In der Zwischenzeit haben verschiedene Stellen von dieser Arbeit unseres Fachausschusses profitiert. Eine Neuauflage wird in Kürze notwendig.

Die zweite Aufgabe wurde vom Fachausschuß ebenfalls erfolgreich fortgeführt. Hier hat eine aus den Herren Bauer, Bottenbruch, Rutishauser und Samelson bestehende Arbeitsgruppe in Zusammenarbeit mit anderen Fachkollegen die algorithmische Sprache ALGOL erarbeitet, die auf der ICIP-Tagung eingehend dargelegt und diskutiert

wurde. Sie hat in der Zwischenzeit weitgehende Verbreitung gefunden. Zum Zwecke eines endgültigen Berichtes fand im Januar dieses Jahres in Paris eine Sitzung statt. Das Ergebnis wurde als ALGOL 60 durch Zusendung eines in der Zeitschrift „Numerische Mathematik“ erschienenen Artikels allen Interessenten der GAMM zugänglich gemacht.

IV. Fachausschuß für Rechenmaschinen

Leiter: Prof. Dr. A. Walther, Darmstadt

Im Berichtsjahr schritt die Ausstattung der deutschen Universitäten, Technischen Hochschulen und Forschungsinstitute mit Elektronenrechnern erfreulich stark fort. Hierdurch wirkte der Fachausschuß „Rechenmaschinen“ mit durch Beratung der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) und der sonstigen an der Beschaffung der Geräte beteiligten Stellen. Vor allem aber bemühte er sich, alle an den neuen Hilfsmitteln interessierten Fachleute in engem Kontakt zu halten und den gegenseitigen Erfahrungsaustausch zu fördern.

Zu den selbstgebaute Analogrechnern ELARD in Darmstadt und EAR I in Ilmenau traten in zahlreichen Instituten Analogrechner der Typen Telefunken, Short Brothers, Pace, Beckman, Donner, WTBG (Wiss.-Techn. Büro für Gerätebau) und MN 7. Noch reichhaltiger sieht es bei den Digitalrechnern aus. Die Eigenbauten G1, G2, G3 in Göttingen bzw. München, PERM in München, D1 in Dresden, DERA in Darmstadt wurden oder werden an vielen Orten ergänzt durch elektronische Rechenautomaten Zuse Z 22, IBM 650, Siemens 2002, Standard Elektrik Lorenz ER 56, Schoppe und Faeser Librascope LGP 30, Ferranti Pegasus, Electrologica X 1, Telefunken TR 4, Funkwerk, Ural und Zeiß ZRA 1. So ist in überraschend kurzer Zeit eine große Menge von Rechenzentren an Hochschulen entstanden.

Charakteristisch für Rechanlagen ist, daß der Augenblick ihrer Aufstellung den Beginn einer beständigen intensiven Tätigkeit für Forschung und Unterricht bedeutet. Als Beispiel sei erwähnt, daß wir auf der Darmstädter IBM 650 in den drei Jahren von Februar 1957 bis Februar 1960 aus den verschiedensten wissenschaftlichen Gebieten 416 Forschungsprobleme bearbeitet haben. Sie stammten keineswegs nur aus unserer eigenen Hochschule, sondern von überallher aus Deutschland, teilweise auch aus dem Ausland. Die zweistündige Vorlesung über Programmieren im Sommer 1959 hatte 189 Hörer, das dreistündige Praktikum 171 aktive Teilnehmer.

Die mit dem Vorhandensein eines Elektronenrechners notwendigerweise verbundenen Vorlesungen, Übungen, Praktika, Seminare und Kolloquien werden in absehbarer Zeit den bisherigen Mangel an Fachleuten für elektronisches Rechnen beheben. Darüber hinaus geben sie dem Nachwuchs Anregungen zur wissenschaftlichen Arbeit über numerische Mathematik, Programmieren und Technik der Rechanlagen. Damit fördern sie das Wiederauswachsen der reinen und angewandten, der theoretischen und praktischen Mathematik, wie wir in eindrucksvoller Weise hier auf unserer Tagung gesehen haben. Für Außenstehende veranstalteten manche Rechenzentren Ausbildungskurse. Genannt seien für Darmstadt der OEEC-Kurs im Oktober 1959 und der AIF-Kurs im März 1960.

Als überregionales, hochschulunabhängiges Rechenzentrum ist das Deutsche Rechenzentrum Darmstadt (DRD) mit einem eigenen Gebäude und einer elektronischen Rechanlage IBM 704 im Entstehen. Es soll unter der Rechtsform einer Stiftung eine ausgesprochen gemeinnützige Einrichtung im Dienste der wissenschaftlichen Forschung werden. Wir hoffen auf einen räumlich und interessenmäßig weit ausgedehnten Benutzerkreis. Geplant sind beispielsweise Untersuchungen über Verfahren der numerischen Mathematik, partielle Differentialgleichungen, Monte-Carlo-Methode und Unternehmensforschung.

An Büchern über Rechanlagen liegen jetzt endlich auch solche in deutscher Sprache vor: „Elektronische Analogrechner“ von D. Ernst und „Ziffern-Rechanautomaten“ von W. Kämmerer. Die drei jungen deutschen Zeitschriften unseres Gebietes: Numerisches Rechnen, Elektronische Rechanlagen und Elektronische Datenverarbeitung haben sich gut eingebürgert.

Auf dem Gebiete der Festlegung und Normung der Begriffe ist noch viel zu tun. Mit dem entsprechenden Fachausschuß der NTG und den zuständigen wissenschaftlichen Stellen des Auslandes stehen wir in guter Verbindung.

Damit kommen wir zu den internationalen Beziehungen. Zuerst muß an die von der UNESCO veranstaltete Pariser Internationale Tagung über Informationsverarbeitung (International Conference on Information Processing, ICIP) im Juni 1959 erinnert werden. Sie verlief mit fast 2000 Teilnehmern, darunter etwa 230 aus ganz Deutschland, wissenschaftlich ertragreich und menschlich harmonisch. Der umfangreiche Tagungsbericht wird bald im Verlag R. Oldenbourg in München erscheinen.

In Paris wurde auch die Begründung einer Internationalen Vereinigung von Gesellschaften zur Informationsverarbeitung (International Federation of Information Processing Societies, IFIPS) beschlossen, die künftige ähnliche Tagungen veranstalten soll. Die GAMM wird ihr als Mitglied der Deutschen Arbeitsgemeinschaft für Rechenanlagen (DARA) angehören. Die konstituierende Sitzung von IFIPS ist für Juni 1960 in Rom geplant.

Eine große Rolle spielten in Paris und auch in der Zeit seitdem die Diskussionen über ALGOL, also über die internationale algorithmische Formelsprache für Rechenautomaten. Jeder, der mit Rechenautomaten zu tun hat, weiß, daß die Bedeutung einer solchen Formelsprache nicht hoch genug eingeschätzt werden kann.

Der Beitritt von Deutschland zum Provisorischen Internationalen Rechenzentrum in Rom, abgekürzt PICC, scheint nach Überwindung vieler Schwierigkeiten und Rückschläge nunmehr endlich bevorzustehen. Er wird dazu beitragen, daß sich die Fachleute für Rechenanlagen mehr und mehr zu einer großen internationalen Familie zusammenschließen. Vermutlich können dadurch auch die vierteljährlichen Titellisten über Rechenanlagen, welche die Darmstädter Literaturstelle der DFG herausgibt, eine Erweiterung und internationale Ausgestaltung erfahren.

Zusammenfassend darf gesagt werden, daß der Fachausschuß Rechenmaschinen über ein gutes Jahr berichten konnte. Wie hätte es auch anders sein können in Freiberg, wo das Germanium entdeckt worden ist, eines der Grundelemente für die moderne Technik der Rechenanlagen!

V. Fachausschuß für Regelungstechnik

Leiter: Prof. Dr. W. Oppelt, Darmstadt

Eine Zusammenkunft im Herbst 1960 ist geplant, auf der über „Statistische Rechenverfahren in ihrer Anwendung auf die Regelungstheorie“ gesprochen werden soll. Interessenten und Herren, die Beiträge haben, werden gebeten, sich mit dem Leiter in Verbindung zu setzen.

VI. Fachausschuß für Rheologie

Leiter: Prof. Dr. Schultz-Grunow, Aachen

Der Ausschuß tagte zusammen mit dem gleichnamigen Ausschuß des VDI in Karlsruhe.

VII. Fachausschuß für statistische Verfahren

Leiter: Prof. Dr. H. Richter, München

Der Fachausschuß für Statistische Verfahren führte zusammen mit dem Oberwolfacher Forschungsinstitut vom 6.—11. März 1960 eine Tagung über „Wahrscheinlichkeitstheorie und Mathematische Statistik“ durch. Die Leitung lag in den Händen von Herrn Professor Krickeberg. Diese Tagung war international so gut besucht, daß erwogen wird, die nächste derartige Tagung nicht wie üblich erst in zwei Jahren, sondern bereits früher anzusetzen. Sie wird dann unter der Leitung von Herrn Professor Jacobs stehen.

Die Herren Jacobs, Krickeberg und der Leiter dieses Ausschusses nahmen an einer wahrscheinlichkeitstheoretischen Tagung Anfang Juni 1959 in Prag teil.

VIII. Fachausschuß für Strömungsforschung

Leiter: Dr. F. Riegels, Göttingen

Kein Bericht eingegangen.

IX. Fachausschuß für Unternehmensforschung

Leiter: Prof. Dr. H. Görtler, Freiburg i. B.

Der Fachausschuß für Unternehmensforschung wurde anläßlich der Jahrestagung 1959 in Hannover ins Leben gerufen. Zur Klärung des Arbeitsbereichs und der vordringlichen Aufgaben des Fachausschusses wurden Beziehungen zu anderen an der Unternehmens-

forschung interessierten Organisationen und Arbeitsgruppen in Deutschland angeknüpft, wobei der Fachausschußleiter insbesondere als Diskussionsleiter bei einem von der WGL veranstalteten „Seminar über Operations Research“ (31. 8.—1. 9. 1959) in Aachen wirkte. Um ein arbeitsfähiges Gremium zu gewinnen, wurde aus dem erfreulich großen Kreis der an Unternehmensforschung interessierten GAMM-Mitglieder ein engerer Fachausschuß mit gegenwärtig 15 Mitgliedern als eigentlicher Träger der Arbeit gebildet. Eine erste Sitzung fand am 11. April 1960 an der Universität Freiburg i. Br. statt. Die Bemühungen des Fachausschusses richten sich zunächst vordringlich auf die Förderung des gegenwärtig vereinzelt angelaufenen Unterrichts und der Forschung an unseren Hochschulen. Ein von den Herren Prof. Dr. W. Gaschütz, Kiel, Prof. Dr. H. Kneser, Tübingen und Prof. Dr. F. Sommer, Würzburg, gebildeter Unterausschuß unter Federführung des Letztgenannten widmet sich der Erarbeitung von Empfehlungen der GAMM an die Hochschulen für den Ausbau der Studien- und Prüfungsordnung für Diplom-Mathematiker der wirtschaftswissenschaftlichen Fachrichtung. Ein weiterer Unterausschuß unter der Federführung von Prof. Dr. J. Heinhöhl, München, widmet sich dem Gebiet der Terminologie. Ein 10-tägiges Seminar über den Hochschulunterricht auf dem Gebiet der Unternehmensforschung für einen kleinen Kreis von Hochschullehrern und eingeladenen erfahrenen Spezialisten der Praxis wird an der Universität Freiburg i. Br. vorbereitet. Hierbei sollen Wissenschaftler aus England, Frankreich und U. S. A. Vorträge halten. Zu weiteren Verhandlungsgegenständen des Fachausschusses gehören die Frage der deutschsprachigen Fachliteratur, die Schaffung von Finanzierungsmöglichkeiten für die Gewinnung ausländischer Gastprofessoren und die Entsendung junger qualifizierter Wissenschaftler an führende Zentren der Forschung und der Praxis im Ausland. Die Zusammenarbeit des Fachausschusses der GAMM mit den zuständigen wissenschaftlichen Organisationen anderer Länder und mit der International Federation of Operational Research Societies (IFORS) ist angebahnt worden.

B. Der Mitgliederstand der GAMM betrug im April 1960 1144 Mitglieder; davon leben 284 im Ausland, 60 sind korporative Mitglieder.

C. Die Kassenlage ist weiterhin günstig, so daß auch diesmal der Mitgliedsbeitrag (DM 6,— für das einzelne Mitglied) noch nicht erhöht zu werden braucht.

D. Jahrestagung 1961

Es wird in Aussicht genommen, die nächste wissenschaftliche Jahrestagung der GAMM in Würzburg in der Osterwoche vom 4. bis 8. April 1961 abzuhalten. Es soll in Zukunft angestrebt werden, die Jahrestagungen der GAMM und der DMV (Deutsche Mathematiker-Vereinigung) möglichst anschließend am gleichen Ort abzuhalten.

E. Neuwahlen

Anstelle der turnusmäßig ausscheidenden Prof. Drs. Dörr, Kauderer, Maruhn wurden in den wissenschaftlichen Ausschuß die Prof. Drs. Albring, Klotter, Truckenbrodt gewählt. Die für 1960 gewählten Kassenprüfer Prof. Drs. Reutter, Schmetterer, Weigand wurden wiedergewählt; anstelle von Prof. Dr. Albring wurde Prof. Dr. Krienes gewählt.

K. Wieghardt

A. ANGEWANDTE MATHEMATIK

Ein Iterationsverfahren mit Fehlerabschätzung bei linearen Integralgleichungen

VON WERNER BOLLERMANN

Zur Iteration linearer inhomogener Integralgleichungen zweiter Art sind die Fehler quellenmäßig darstellbar und gestatten eine Entwicklung nach Eigenfunktionen. Bei geeigneter Wahl der Anfangsnäherung (vgl. die NEUMANNsche Reihe) entspricht der Anfangsfehler der Lösung selbst und die Entwicklungskoeffizienten, welche einen mit wachsender Anzahl von Iterationsschritten klein werdenden Faktor enthalten, sind zu jeder Fehlerdarstellung bekannt¹⁾.

Zur numerischen Auswertung werden Abschätzungen für die Fehler vermittle des iterierten Kernes und einer unteren Schranke für den Betrag des ersten Eigenwertes hergeleitet, welche auch auf die Fehler zu einem beliebig gewählten Ansatz übertragbar sind.

1. Problemklasse

$$y(x) = f(x) + k \int_a^b K(x, \xi) y(\xi) d\xi \quad \dots \dots \dots (1)$$

Bei reellen Veränderlichen x, ξ im endlichen Intervall $a \leq x, \xi \leq b$ ($b > a$) erfülle der reelle nicht identisch verschwindende Kern $K(x, \xi)$ folgende Bedingungen:

I. Symmetrie:

$$K(x, \xi) \equiv K(\xi, x)$$

II. Mittlere Stetigkeit:

$$\lim_{x_1 \rightarrow x} \int_a^b [K(x, \xi) - K(x_1, \xi)]^2 d\xi = 0 \quad \dots \dots \dots (2)$$

III. $K(x, \xi)$ und $K^2(x, \xi)$ sei in bezug auf jede der Veränderlichen x und ξ im Intervall $[a, b]$ integrierbar. ([4] S. 170—171).

Die Funktion $f(x)$ sei stetig und der reelle Parameter k sei von allen Eigenwerten der homogenen Aufgabe verschieden. Es folgt die Existenz einer eindeutig bestimmten Lösung y und für ihre Entwicklungskoeffizienten gilt (mit der Schreibweise $h_i = \int_a^b h z_i dx$):

$$y_i = \frac{k_i}{k_i - k} f_i \quad ([4] \text{ S. 266}) \quad \dots \dots \dots (3),$$

$k_i (|k_1| \leq |k_2| \leq |k_3| \leq \dots)$ und $z_i(x)$, $i = 1, 2, \dots$ als Eigenwerte und Eigenlösungen der homogenen Aufgabe (1).

2. Iteration und Fehlerdarstellung

Ausgehend von einer stetigen Funktion u_0 im Iterationsverfahren

$$u_{n+1} = f + k \int_a^b K u_n d\xi \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad \dots \dots \dots (4)$$

ist der Fehler

$$\beta_s = u_s - y \quad (s = 0, 1, 2, \dots) \quad \dots \dots \dots (5)$$

unter Vermittlung der stetigen Funktion β_n quellenmäßig darstellbar:

$$\beta_{n+1} = k \int_a^b K \beta_n d\xi \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad \dots \dots \dots (6).$$

Die Entwicklungskoeffizienten lassen sich rekursiv auf diejenigen des Anfangsfehlers zurückführen und der Entwicklungssatz führt auf folgende absolut und gleichmäßig konvergente Darstellung:

$$\beta_{n+1} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k_i} \right)^{n+1} \beta_{0,i} z_i \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad \dots \dots \dots (7).$$

¹⁾ Vgl. das Analogon bei linearen Randwertaufgaben mit Zuordnung einer Eigenwertaufgabe: [1] S. 193—5, [2] S. 177—9, [7].

Mit der Beschränkung $|k| < |k_1|$ folgt aus (7), daß die Folge der Fehlerbeträge mit wachsender Anzahl von Iterationsschritten gleichmäßig gegen 0 strebt. Der spezielle Ansatz $u_0 \equiv 0$ führt auf

$$\beta_{0,i} = -\frac{k_i}{k_i - k} f_i \quad (\beta_0 = -y, \text{ vgl. 5}) \dots \dots \dots (8)$$

und die konkrete Fehlerdarstellung:

$$\beta_{n+1}(x) = -\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k_i}\right)^{n+1} \frac{k_i}{k_i - k} f_i z_i(x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \dots \dots \dots (9).$$

3. Fehlerabschätzung

Nach Gleichung (9) gilt für den Fehlerbetrag

$$|\beta_{n+1}| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left[\left| \frac{k}{k_i} \right|^n \frac{|k|}{1 - |k/k_i|} \sqrt{\left(\int_a^b f z_i dx \right)^2} \sqrt{\frac{z_i^2}{k_i^2}} \right] \dots \dots \dots (10)$$

mit der Möglichkeit folgender weiterer Abschätzungen:

$$1. \left(\int_a^b f z_i dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2 dx \quad (\text{SCHWARZsche Ungleichung u. Normierung})$$

$$2. K_2(x, x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z_i^2}{k_i^2} \geq \frac{z_s^2}{k_s^2} \quad (s \text{ als natürliche Zahl}) \dots \dots \dots (11)$$

$$3. \int_a^b K_n(x, x) dx = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{|k_i|^n} \quad (n = 2, 4, \dots; K_n \text{ als } n\text{-ter iterierter Kern}).$$

Vermittels einer unteren Schranke k^+ für den Betrag des ersten Eigenwertes kommt man zu einer Abschätzung des Fehlers, welche mit wachsender Anzahl von Iterationsschritten noch gleichmäßig gegen 0 strebt:

$$\beta_{n+1}^2 \leq K_2(x, x) \left[\frac{k}{1 - |k/k^+|} \right]^2 \int_a^b f^2 dx \left[k^n \int_a^b K_n(x, x) dx \right]^2 \quad (n = 2, 4, \dots) \dots \dots (12).$$

Ein praktisch brauchbareres Ergebnis erhält man durch Einführung von

$$\int_a^b K_n(x, x) dx \leq \left[\int_a^b K_2(x, x) dx \right]^{n/2} \quad (n = 2, 4, \dots):$$

$$\beta_{n+1}^2 \leq K_2(x, x) \left[\frac{k}{1 - |k/k^+|} \right]^2 \int_a^b f^2 dx e^n \dots \dots \dots (13)$$

$$\left(u_0 \equiv 0; \quad n = 2, 4, \dots; \quad |k_1| \geq k^+ > |k|; \quad \text{Konvergenz bei } e = k^2 \int_a^b K_2(x, x) dx < 1 \right).$$

4. Eine Integralgleichung für den Fehler bei beliebigem Ansatz

Um sich von dem speziellen Ansatz $u_0 \equiv 0$ (8—13) zu befreien, kann bei beliebig gewähltem u_0 nach einem Iterationsschritt in (4) die direkte Iteration des Fehlers in einer benachbarten Integralgleichung vorgenommen werden:

$$\beta_1 - \beta_0 = u_1 - u_0 \quad (\text{vgl. 5}) \dots \dots \dots (14)$$

läßt sich mittels der Darstellung (6) überführen in

$$\beta_p(x) = f_p(x) + k \int_a^b K(x, \xi) \beta_p(\xi) d\xi \dots \dots \dots (15)$$

$$\left(p = 0, 1; \quad f_0 = u_0 - u_1; \quad f_1 = k \int_a^b K [u_0 - u_1] d\xi \right).$$

Iterative Lösung von Gleichung (15) mit speziellem Ansatz $w_{p,0} \equiv 0$ zu

$$w_{p,n+1} = f_p + k \int_a^b K w_{p,n} d\xi \quad (n = 0, 1, 2, \dots; p = 0, 1) \dots \dots \dots (16)$$

führt unter Verwendung der Abschätzung (13) auf das Ergebnis:

$$y = u_p - w_{p,n+1} + h_{p,n+1} \dots \dots \dots (17)$$

$$\left(h_{p,n+1}^2 \leq K_2(x, x) \left[\frac{k}{1 - |k/k^+|} \right]^2 \int_a^b f_p^2 dx e^n; \quad n = 2, 4, \dots; \quad p = 0, 1 \right).$$

5. Ein einführendes Beispiel

$$y(x) = x^2 + k \int_0^1 (x + \xi) y(\xi) d\xi$$

$$\left(K_2(x, \xi) = \frac{x + 2x\xi + \xi}{2} + \frac{1}{3}, \quad e = k^2 \frac{7}{6}, \quad |k_1| \geq k^+ = 0,925 > |k| \right)$$

Ergebnisse zu $k = \frac{1}{3}$ bei Iteration nach (4, 13):

n:	u_{n+1}	Fehler in % zu $x = 0$:	
		(nach 13)	(wahrer Fehler)
2	$x^2 + 0,157\,41\,x + 0,109\,57$	$\pm 16,2$	$+ 13,6$
4	$x^2 + 0,179\,78\,x + 0,122\,50$	$\pm 1,9$	$+ 1,6$
6	$x^2 + 0,182\,68\,x + 0,124\,17$	$\pm 0,25$	$+ 0,20$

($y = x^2 + 0,183\,10\,x + 0,124\,41$ als exakte Lösung).

Ergebnisse zu $k = \frac{2}{3}$ bei Fehleriteration nach (14—17):

$$u_0 = x^2 + 0,86\,x + 0,54; \quad u_1 = x^2 + 0,868 \dots x + 0,537 \dots; \quad p = 0.$$

$$y = u_0 - w_{0,3} \pm h_{0,3} = x^2 + 0,871\,69\,x + 0,539\,76 \pm \sqrt{x^2 + x + \frac{1}{3}} \frac{4,3}{100}$$

($y = x^2 + 0,875\,x + 0,541\,6 \dots$ als exakte Lösung)

Fehler in %, (...) als wahrer Fehler:

$$\begin{array}{ccc} \pm 0,47 \quad (+ 0,32) & \pm 0,37 \quad (+ 0,28) & \pm 0,28 \quad (+ 0,21) \\ \text{zu } x = 0 & x = 0,5 & x = 1 \end{array}$$

Literatur

- [1] L. COLLATZ, Eigenwertaufgaben mit Technischen Anwendungen, 1949.
- [2] L. COLATZ Numerische Behandlung von Differentialgleichungen (2. Auflage), 1955.
- [3] R. COURANT u. D. HILBERT, Methoden der Mathematischen Physik, Bd. I (2. Auflage), 1931, und Bd. II, 1937.
- [4] W. SCHMEIDLER, Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik, Bd. I (2. Auflage), 1955.
- [5] H. BÜCKNER, Die prakt. Behandlung von Integralgleichungen, 1952.
- [6] G. HAMEL, Integralgleichungen (2. Auflage), 1949.
- [7] W. BOLLERMANN, Zur Fehlerabschätzung beim Iterationsverfahren linearer Randwertprobleme, ZAMM 39 (1959), S. 354—5.

Anschrift: Dr. W. BOLLERMANN, Stadthagen (b. Hannover), Bahnhofstr. 65

Sur une nouvelle application de la méthode de Rayleigh

Par N. FORBAT et A. HUAUX

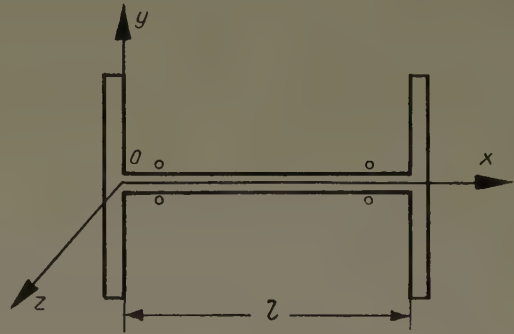
§ 1. Enoncé du problème

Nous cherchons les fréquences propres des vibrations de flexion du système suivant: un arbre cylindrique, homogène porte deux volants dynamiquement de révolution, parfaitement centrés, un volant à chaque extrémité, et est en rotation uniforme de vitesse angulaire Ω . On suppose les 2 volants équidistants des appuis, à distance négligeable de ceux-ci. Tous les coefficients figurant dans les formules sont supposés connus, à l'exception de la pulsation propre ω dont il s'agit précisément de déterminer les valeurs.

La loi du mouvement de l'arbre sera de la forme $y = y(x, t)$, $z = z(x, t)$.

Nous définissons un mouvement stationnaire propre ou mode propre de pulsation propre ω par les relations

$$\begin{cases} y = Y(x) \cdot \cos(\omega t - \varphi) & \dots (1), \\ z = Z(x) \cdot \cos(\omega t - \varphi') & \dots (2). \end{cases}$$



Nous avons 4 conditions aux limites cinématiques exprimant la fixité des appuis et 4 conditions aux limites dynamiques obtenues en écrivant les équations du mouvement des 2 volants. Ces 8 conditions doivent être identiquement satisfaites en t .

Grâce aux conditions aux limites cinématiques, on démontre que la solution (1), (2) peut s'écrire [2]

$$\begin{cases} y = Y(x) \cdot \cos \omega t & \dots (3), \\ z = Z(x) \cdot \sin \omega t & \dots (4). \end{cases}$$

Dans l'hypothèse où les volants sont identiques, on démontre que [2]: $|Y| = |Z|$, (5), c'est-à-dire que la vibration est circulaire; dès lors, la solution (1), (2) s'écrit

$$\begin{cases} y = Y(x) \cdot \cos \omega t & \dots (6), \\ z = \pm Y(x) \cdot \sin \omega t & \dots (7). \end{cases}$$

En exprimant que les fonctions (6) et (7) vérifient les 8 conditions aux limites, on obtient un système de 4 équations linéaires et homogènes à 4-inconnues; la condition de compatibilité de ce système fournit les pulsations propres cherchées ω .

§ 2. Application des méthodes de Rayleigh et de Ritz. Généralités

Nous nous sommes proposé de trouver les ω approchés par une méthode variationnelle dont l'idée est exposée dans „Eigenwertprobleme“ [1]. Toutefois, dans le cas que nous traitons, interviennent deux fonctions inconnues Y et Z de la variable spatiale, et surtout le paramètre cherché ω figure dans les conditions aux limites dynamiques au premier et au second degré.

Nous exprimons qu'une certaine fonctionnelle

$$J(Y, Z) = \int_0^l F dx + G[Y(0), Y(l), Z(0), Z(l), Y'(0), Y'(l), Z'(0), Z'(l)],$$

est extremum; les fonctions F et G sont choisies de telle sorte que nos équations différentielles et nos conditions aux limites ne sont autres que les équations d'EULER-LAGRANGE et les conditions aux limites du problème suivant du calcul des variations: parmi tous les couples de fonctions Y et Z vérifiant les conditions aux limites cinématiques, trouver celui qui rend extremum la fonctionnelle $J(Y, Z)$.

Il n'est pas possible de trouver des Y et Z vérifiant les conditions aux limites dynamiques car le paramètre inconnu ω intervient dans ces conditions.

Nous prenons 2 fonctions Y et Z de la forme

$$\begin{cases} Y = c_1 \cdot Y_1 + c_2 \cdot Y_2 & \dots \dots \dots (8), \\ Z = c_3 \cdot Z_1 + c_4 \cdot Z_2 & \dots \dots \dots (9), \end{cases}$$

c_1, c_2, c_3, c_4 étant des constantes. Il en résulte que la fonctionnelle J devient un polynôme homogène du second degré en les c_i :

$$J = A_{11} \cdot c_1^2 + \dots + A_{44} \cdot c_4^2 + 2 A_{12} \cdot c_1 \cdot c_2 + \dots + 2 A_{34} \cdot c_3 \cdot c_4 \dots \dots (10).$$

Nous exprimons que

$$\frac{\partial J}{\partial c_1} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial c_2} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial c_3} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial c_4} = 0 \dots \dots \dots (11).$$

La condition de compatibilité des 4 équations linéaires et homogènes (11) fournit les pulsations propres

$$\text{déterminant } \|A_{ij}\| = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, 4 \dots \dots \dots (12).$$

L'équation (12) est du 8^{me} degré en ω ; plus exactement, dans notre problème, elle est du 4^{me} degré en ω^2 . Elle admet 8 racines opposées 2 à 2, elle fournit 4 pulsations propres pour chaque vitesse de rotation imposée à l'arbre.

Nous n'avons pas traité le cas général de deux volants non identiques, car nous n'avons pas de données numériques susceptibles de vérification expérimentale. Dans le cas particulier où les 2 volants sont identiques, nous disposons d'une étude théorique rigoureuse et d'une vérification expérimentale précise; en outre, on démontre que les vibrations propres sont circulaires. C'est ce cas que nous allons traiter.

§ 3. Fonctionnelle à rendre extremum

Le § 1 et le § 2 donnent

$$\begin{aligned} J(Y, Z) = & \int_0^l E \cdot I \cdot (Y''^2 + Z''^2) dx - \omega^2 \int_0^l \rho \cdot S \cdot (Y^2 + Z^2) dx - J_v' \cdot \omega^2 \cdot [Y'(0)]^2 \\ & - J_v' \cdot \omega^2 \cdot [Y'(l)]^2 - J_v' \cdot \omega^2 \cdot [Z'(0)]^2 - J_v' \cdot \omega^2 \cdot [Z'(l)]^2 \\ & - 2 \Omega \cdot \omega \cdot J_x \cdot Y'(0) \cdot Z'(0) - 2 \Omega \cdot \omega \cdot Y'(l) \cdot Z'(l) \dots \dots \dots (13). \end{aligned}$$

§ 4. Methode de Rayleigh: mode propre fondamental, zéro noeud

Déformées

nature

équations

Equations aux pulsations propres

sinusoïdale	$\begin{cases} Y = \pm A \cdot \sin \pi \frac{x}{l} & (14), \\ Z = A \cdot \sin \pi \frac{x}{l} & (15), \end{cases}$	$\left(\rho \cdot S \cdot \frac{l}{\pi^2} + 4 \frac{J_v'}{l^2} \right) \cdot \omega^2 \pm 4 \Omega \cdot \frac{J_x}{l^2} \omega - \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^3} = 0 \quad (16),$

parabolique
du 2^{me} degré

$$\begin{cases} Y = \pm A \cdot x \cdot (l - x) & (17), \\ Z = A \cdot x \cdot (l - x) & (18), \end{cases}$$

$$\left(\rho \cdot S \cdot \frac{l}{30} + 2 \frac{J_v'}{l^2} \right) \cdot \omega^2 \pm 2 \Omega \cdot \frac{J_x}{l^2} \omega - 4 \frac{E \cdot I}{l^3} = 0 \dots (19).$$

§ 5. Méthode de Ritz: mode propre à un noeud

Déformées

Equations aux pulsations propres

sinusoïdale	$\begin{cases} Y = \pm \left(A \sin \frac{\pi x}{l} + B \sin \frac{2\pi x}{l} \right) & (20), \\ Z = A \sin \frac{\pi x}{l} + B \sin \frac{2\pi x}{l} & (21), \end{cases}$	$\left(\rho \cdot S \cdot \frac{l}{\pi^2} + 4 \frac{J_v'}{l^2} \right) \cdot \omega^2 \pm 4 \Omega \cdot \frac{J_x}{l^2} \omega - \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^3} = 0 \dots (22),$

para-
bolique
du 3^{me}
degré

$$\begin{cases} Y = \pm [A x (l - x) + B x (l - x) (l - 2x)] & (24), \\ Z = A x (l - x) + B x (l - x) (l - 2x) & (25), \end{cases}$$

$$\left(\rho \cdot S \cdot \frac{l}{30} + 2 \frac{J_v'}{l^2} \right) \cdot \omega^2 \pm 2 \Omega \cdot \frac{J_x}{l^2} \omega - 4 \frac{E \cdot I}{l^3} = 0 \dots (26),$$

$$\left(\rho \cdot S \cdot \frac{l}{210} + 2 \frac{J_v'}{l^2} \right) \cdot \omega^2 \pm 2 \Omega \cdot \frac{J_x}{l^2} \omega - 12 \frac{E \cdot I}{l^3} = 0 \quad (27).$$

Discussion des équations aux pulsations propres

a) Dans les équations (16), (19), (22), (23), (26), (27), le signe + correspond aux pulsations propres des vibrations circulaires rétrogrades, c'est-à-dire qui ont le sens inverse de la rotation imposée Ω . Le signe — correspond aux pulsations propres des vibrations circulaires directes c'est-à-dire qui ont le sens du mouvement imposé.

b) Les racines des 2 équations (16) sont réelles et ont des valeurs absolues égales; il suffit donc de résoudre une seule des équations (16) et de prendre les valeurs absolues des racines. Il en est de même des équations (19), (22), (23) et (27).

c) Pour chaque valeur de Ω , on obtient deux pulsations propres; la plus petite correspond à une vibration circulaire rétrograde et la plus grande à une vibration circulaire directe. Nous obtenons les fréquences propres par minute en fonction du nombre de tours N par minute du moteur.

d) Les équations (16) et (22) sont identiques, car la fonctionnelle J correspondante ne contient pas de terme rectangle en $A \cdot B$, vu que $\int_0^l \sin \frac{2\pi x}{l} \cdot \sin \frac{2\pi x}{l} dx = 0$, et que les termes rectangles en $A \cdot B$ de la fonction additionnelle G se détruisent. Les équations (19) et (26) sont identiques pour des raisons analogues.

e) Concordance de la méthode approchée et de la méthode exacte.

Pour les vibrations circulaires rétrogrades, la concordance est bonne, excellente même avec une déformée parabolique.

Pour les vibrations circulaires directes, la concordance est moins bonne; au-delà de $N = 1000$ tours/minute, elle disparaît pour le mode propre fondamental et si N tend vers l'infini, la fréquence propre de la vibration circulaire directe tend vers l'infini dans la méthode approchée alors que dans la méthode théorique rigoureuse elle tend vers la valeur 1100 fréquences/minute.

Mathématiquement, cette discordance s'explique comme suit. Soient ω_1 et ω_2 les racines d'une des équations (16). Nous avons

$$|\omega_1| \cdot |\omega_2| = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{\frac{q \cdot S \cdot l^2}{\pi^2} + 4 J_v' \cdot l} \quad \dots \dots \dots (28).$$

Par conséquent, si $|\omega_1|$ tend vers zéro, $|\omega_2|$ tend vers l'infini. La méthode approchée ne permet pas une approximation meilleure. La discordance disparaîtrait si l'on pouvait faire dépendre le second membre de la formule (28) de Ω , de telle sorte qu'il tende vers zéro quand Ω tend vers l'infini, car il en est ainsi pour les valeurs théoriques exactes. On a un raisonnement analogue avec les autres équations aux pulsations propres.

f) L'équation (23) donne des résultats discordants pour les 2 espèces de vibrations, mais l'équation (27) donne des résultats concordants pour la vibration circulaire rétrograde, et concordants pour la vibration circulaire directe jusque $N = 1500$ tours/minute où l'erreur relative atteint 10%; au-delà, la discordance reparaît, mais elle est moins accentuée que pour le mode propre fondamental.

§ 6. Vérification expérimentale

On fait tourner l'arbre jusqu'à la vitesse de 5000 tours/minute. On laisse constant le nombre de tours N du moteur et l'on imprime une vibration forcée à l'arbre à l'aide d'un pulseur dont on fait varier la fréquence à l'aide d'un fréquencesmètre. Chaque fois que la fréquence du pulseur coïncide avec une fréquence propre du système, on observe un maximum des amplitudes des vibrations de l'arbre. On construit le graphique $f = f(N)$ et l'on y porte les points expérimentaux.

Ce travail a été réalisé pour la première fois au Laboratoire de Mécanique Rationnelle de la Faculté Polytechnique de Mons par M. PHILIPPE en 1954 [2].

§ 7. Conclusion

La méthode de RAYLEIGH et la méthode de RITZ nous ont donné les fréquences propres de vibration de flexion du système envisagé pour les modes propres à zéro noeud et à un noeud. La concordance des résultats approchés, des résultats expérimentaux et des résultats théoriques est

excellente pour les vibrations circulaires rétrogrades; elle est bonne pour les vibrations circulaires du mode fondamental jusqu'à $N = 500$ tours/minute et pour celles du mode à un noeud jusqu'à $N = 1500$ tours/minute.

A notre connaissance, c'est la première fois que l'on aborde un problème de vibrations de flexion où la pulsation inconnue ω figure dans les conditions aux limites au premier et au second degrés. Nous n'avons trouvé que quelques indications, dans le cas où ω figure au premier degré dans les conditions aux limites [3].

La méthode décrite ci-dessus aurait son principal champ d'application dans un cas où les vibrations propres ne seraient pas circulaires et où on ne devrait pas respecter la condition: $|Y| = |Z|$.

Bibliographie

- [1] L. COLLATZ, Eigenwertprobleme und ihre numerische Behandlung. Leipzig 1945: Akademische Verlagsgesellschaft.
- [2] M. PHILIPPE, Étude des vibrations de flexion d'un arbre en rotation portant des volants. Mons 1954: Faculté Polytechnique (Travail de fin d'Études).
- [3] S. H. CRANDALL, Engineering Analysis. New-York 1956: McGraw Hill Book Company Inc.

Anschriften: Prof. Dr. N. H. FORBAT, rue de Naast, Mons, Belgien
 AIMÉ HUAUX, 12, rue Marianne, Uccle (Bruxelles 18), Belgien

Ein Verfahren zur numerischen Behandlung von homogenen Integralgleichungen 2. Art mit Fehlerabschätzung

Von GÜNTHER HÄMMERLIN

Vorgelegt sei die homogene Integralgleichung 2. Art

$$\kappa \varphi(s) = \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt \quad (1)$$

Der Kern $K(s, t)$ sei reell und bis auf endliche Sprünge stetig; das Integrationsintervall $\langle a, b \rangle$ werde als endlich angenommen.

I. Ein Verfahren zur numerischen Lösung einer Integralgleichung der vorgelegten Art erhält man so: Wir geben einen Ersatzkern $\tilde{K}(s, t)$ an, $K(s, t) = \tilde{K}(s, t) + K^*(s, t)$, der so beschaffen ist, daß die mit ihm gebildete Ersatzintegralgleichung

$$\tilde{\kappa} \tilde{\varphi}(s) = \int_a^b \tilde{K}(s, t) \tilde{\varphi}(t) dt \quad (2)$$

exakt lösbar wird. Ist $K^*(s, t)$ „klein“, so kann man die Lösungen von (2) als Näherungen der Lösungen von (1) ansehen.

Bildung eines Ersatzkerns mit den geforderten Eigenschaften: Das quadratische Grundgebiet $a \leq s \leq b$, $a \leq t \leq b$, werde in n^2 quadratische Maschen der Seitenlänge $h = \frac{b-a}{n}$, $s_i = s_0 + i h$, $t_j = t_0 + j h$, eingeteilt. Dann wird $K(s, t)$ in jeder Masche durch ein Polynom in s und t interpoliert, das in beiden Variablen von gleichem Grade ist.

a) Approximation nullten Grades

Setzt man $\tilde{K}^{ij} = c_{ij}$ über einer Masche $s_i \leq s < s_{i+1}$, $t_j \leq t < t_{j+1}$, so entsteht mit $\tilde{\varphi}^{(i)}(s) = \tilde{\varphi}_i$ aus (2) ein homogenes System von n linearen Gleichungen für die n Unbekannten $\tilde{\varphi}_0, \tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_{n-1}$. Das System ist der Integralgleichung (2) gleichwertig. Daß aus $c_{ij} = K(s_i, t_j)$ fließende System ist mit demjenigen identisch, das entsteht, wenn man die rechte Seite von (1) durch Anwendung der Rechteckregel in eine endliche Summe verwandelt. $c_{ij} = K\left(s_i + \frac{h}{2}, t_j + \frac{h}{2}\right)$ führt auf dasselbe Gleichungssystem wie die Anwendung der Tangententrapezregel auf (1), und

$\tilde{c}_{ij} = K(s_i, t_j)$ in $s_i - \frac{h}{2} \leq s < s_i + \frac{h}{2}$, $t_j - \frac{h}{2} \leq t < t_j + \frac{h}{2}$, erzeugt $(n+1)$ Gleichungen für $\tilde{\varphi}_0, \tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_n$ und entspricht der Sehntrapezregel, angewandt auf (1). Wesentlich ist jedoch hier die Auffassung, daß die genannten Gleichungssysteme als Näherungslösungen von (1) die exakten Lösungen von (2) liefern.

b) Approximation ersten Grades

Man interpoliert $K(s, t)$ über jeder Masche, geometrisch gesprochen, durch ein hyperbolisches Paraboloid. Legt man dabei die Stützstellen in die Maschenecken, so ist (2) gleichwertig mit dem System

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa} \tilde{\varphi}_i = & \frac{h}{6} (2 K_{i0} + K_{i1}) \tilde{\varphi}_0 + \frac{h}{6} \sum_{j=1}^{n-1} (K_{i,j-1} + 4 K_{ij} + K_{i,j+1}) \tilde{\varphi}_j \\ & + \frac{h}{6} (K_{i,n-1} + 2 K_{in}) \tilde{\varphi}_n \quad i = 0, 1, \dots, n \quad \dots (3). \end{aligned}$$

Man kann jedoch die Wahl der Stützstellen auch nach Minimalprinzipien treffen, indem man etwa fordert:

$$\text{Max } |K^*| \rightarrow \text{Minimum} \quad \dots \dots \dots (4.1),$$

$$\iint K^{*2} ds dt \rightarrow \text{Minimum} \quad \dots \dots \dots (4.2),$$

$$\iint |K^*| ds dt \rightarrow \text{Minimum} \quad \dots \dots \dots (4.3).$$

Die Forderung (4.1) erfüllt man für Approximationen m -ten Grades, indem man die Nullstellen TSCHEBYSCHESCHER Polynome $(m+1)$ -ten Grades in einem Intervall der Länge h als Stützstellen wählt, während (4.2) dadurch befriedigt wird, daß man die Nullstellen LEGENDRESCHER Polynome $(m+1)$ -ten Grades in demselben Intervall als Stützstellen vorschreibt. (4.3)

führt für die Approximation 1. Grades auf die Stützstellen $(s_i + \frac{h}{4}, t_j + \frac{h}{4})$, $(s_i + \frac{3h}{4}, t_j + \frac{h}{4})$, $(s_i + \frac{3h}{4}, t_j + \frac{3h}{4})$, $(s_i + \frac{h}{4}, t_j + \frac{3h}{4})$.

Während die aus (4.1) und (4.3) fließenden Gleichungssysteme sowie die Approximationen höheren Grades hier nicht weiter ausgeführt werden sollen, verdient (4.2) noch besonderes Interesse. Das (4.2) befriedigende Gleichungssystem ist nämlich mit demjenigen identisch, auf das die Anwendung der GAUSSSchen Mittelwertformel mit $(m+1)$ Stützstellen auf (1) führt, wenn man diese auf jedes der Integrationsintervalle der Länge h anwendet. Das liegt daran, daß der Integrand $\tilde{K}(s, t) \tilde{\varphi}(t)$ bei Interpolation m -ten Grades in t vom Grade $2m$ ist, während die GAUSSSche Mittelwertformel sogar den Wert des Integrals über ein Polynom $(2m+1)$ -ten Grades exakt wiedergibt. So ordnet sich auch die GAUSSSche Mittelwertformel unserem Ersatzkernverfahren unter, und dieser Gesichtspunkt wird uns Fehlerabschätzungen für die Eigenwerte möglich machen.

II. Die Fehlerabschätzung für die Differenz zwischen den Eigenwerten von (2) und denjenigen von (1) gründet sich auf die folgende Abschätzung, die sich aus einem von H. WEYL [1] für reelle symmetrische Kerne bewiesenen Satz ergibt, der jedoch sogar für normale Kerne gilt, sofern diese nur reelle oder rein imaginäre Eigenwerte besitzen: Seien $\tilde{\kappa}_1 \geq \tilde{\kappa}_2 \geq \dots \geq 0$ die Folge der nicht-negativen, $\tilde{\kappa}_1 \leq \tilde{\kappa}_2 \leq \dots < 0$ die Folge der negativen Eigenwerte von K , wobei jeder Eigenwert so oft auftritt, wie es seiner Vielfachheit entspricht. Im Falle rein imaginärer Eigenwerte betrachtet man deren Imaginärteile. Die Eigenwerte $\tilde{\kappa}$ von \tilde{K} und κ^* von K^* seien entsprechend geordnet. Dann gilt

$$|\kappa_\nu - \tilde{\kappa}_\nu| \leq \text{Max } |\kappa_\mu^*|.$$

Damit kommt man zu Abschätzungen für jeden Ersatzkern, deren wichtigste die folgenden sind:

a) Approximationen nullten Grades

(Bezeichnung: $N_{s, \dots, s} = \text{Max}_{s, t} |K_{s, \dots, s}|$ und entsprechend für Ableitungen nach t).

Rechteckregel:

$$|\kappa_v - \tilde{\kappa}_v| \leq 0,573 h (N_s + N_t) (b - a) \quad (5.1)$$

Symmetrische Kerne, $N_s = N_t$:

$$|\kappa_v - \tilde{\kappa}_v| \leq 1,077 h N_s (b - a)$$

Tangententrapezregel:

$$|\kappa_v - \tilde{\kappa}_v| \leq 0,286 h (N_s + N_t) (b - a) \quad (5.2)$$

$N_s = N_t$:

$$|\kappa_v - \tilde{\kappa}_v| \leq 0,538 h N_s (b - a)$$

Sehnentrapezregel: Hier gelten dieselben Abschätzungen wie für die Tangententrapezregel. (5.3)

b) Approximationen ersten Grades

Stützstellen in den Maschenecken:

$$N_{ss} = N_{tt} : \left. \begin{aligned} |\kappa_v - \tilde{\kappa}_v| &\leq 0,0910 h^2 (N_{ss} + N_{tt} + 0,0916 h^2 N_{sstt}) (b - a) \\ |\kappa_v - \tilde{\kappa}_v| &\leq 0,175 h^2 (N_{ss} + 0,0477 h^2 N_{sstt}) (b - a) \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

GAUSSsche Mittelwertformel:

$$N_{ss} = N_{tt} : \left. \begin{aligned} |\kappa_v - \tilde{\kappa}_v| &\leq 0,0373 h^2 (N_{ss} + N_{tt} + 0,0373 h^2 N_{sstt}) (b - a) \\ |\kappa_v - \tilde{\kappa}_v| &\leq 0,0695 h^2 (N_{ss} + 0,0200 h^2 N_{sstt}) (b - a) \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

Die Fehlerabschätzungen (5.1)–(5.3) findet man für symmetrische Kerne schon bei H. WIELANDT [2]; sie sind optimal. H. WIELANDT gibt in der genannten Arbeit auch Schranken für die Genauigkeit der Eigenwerte bei Anwendung der SIMPSONschen Regel auf (1) an; hierfür gilt die nicht optimale Schranke $|\kappa_v - \tilde{\kappa}_v| < 0,75 h^2 N_{ss} (b - a)$. Die Konvergenz der Eigenwerte ist also quadratisch wie bei dem Verfahren (3), jedoch ist die Schranke (6.1) i. a. beträchtlich kleiner und überdies optimal. Aus der WIELANDTSchen Arbeit sind auch Schranken für die GAUSSsche Mittelwertformel bekannt, die den hier gefundenen — von denen nur (6.2) angegeben ist — ebenfalls unterlegen sind.

Auch für solche Kerne, die nicht über dem ganzen Grundgebiet so oft differenzierbar sind, wie es die Abschätzungen (5) und (6) erfordern, lassen sich Schranken angeben. Als Beispiel sei die folgende genannt: $K(s, t)$ sei symmetrisch und besitze einen Knick für $s = t$, sonst seien K_{ss} , K_{st} und K_{sstt} stetig. Bei Anwendung des Verfahrens (3) gilt die Schranke:

$$|\kappa_v - \tilde{\kappa}_v| \leq 0,175 h^2 \left\{ \left(1 - \frac{h}{b-a} \right) (N_{ss} + 0,0477 h^2 N_{sstt})^2 + \frac{h}{b-a} (N_{ss} + 0,603 \tilde{N}_{st})^2 \right\}^{1/2} (b - a)$$

mit $\tilde{N}_{st} = \max |K_{st}^{ii} - \frac{1}{h^2} [K_{i+1, i+1} - (K_{i+1, i} + K_{i, i+1}) + K_{ii}]|$; \tilde{N}_{st} interessiert dabei nur in den Maschen, für die $i = j$ ist, die also die Gerade $s = t$ enthalten.

Eine ausführliche Darstellung des Ersatzkernverfahrens mit Fehlerabschätzungen für Eigenwerte und Eigenfunktionen soll in Kürze erscheinen. Wie man erkennt, ist das beschriebene Verfahren nicht auf homogene Integralgleichungen 2. Art beschränkt, sondern kann auch zur Gewinnung von Näherungslösungen inhomogener Integralgleichungen verwendet werden. Auch dieser Fall soll in der angekündigten Veröffentlichung mit Angabe von Fehlerabschätzungen behandelt werden.

Literatur

- [1] H. WEYL, Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen (mit einer Anwendung auf die Hohlraumstrahlung). Math. Ann. 71 (1912), 441—479.
- [2] H. WIELANDT, Error Bounds for Eigenvalues of Symmetric Integral Equations. Proc. Symp. Appl. Math. VI (1956), 261—282.

Anschrift: Dr. GÜNTHER HÄMMERLIN, Inst. f. Angew. Math. der Universität, Freiburg i. Br., Hebelstr. 40

Fehlerabschätzung für die numerische Inversion von Matrizen

Von KONRAD JÖRGENS

Sei A eine reelle, quadratische, nicht singuläre Matrix der Ordnung n und $X = A^{-1}$ ihre Inverse. Eine numerische Inversion von A nach dem GAUSSschen Algorithmus sei durchgeführt und habe die angenäherte Inverse \bar{X} ergeben. Wie groß ist der Fehler $\bar{X} - X$?

Im folgenden wird eine a-posteriori-Abschätzung (im Sinne von OSTROWSKI) angegeben, d. h. eine Fehlerschranke, welche von den numerischen Resultaten abhängt und nach Durchführung der Rechnung leicht ausgewertet werden kann. Es sei $A = L R$ die GAUSSsche Dreieckszerlegung von A . Der Algorithmus reduziert A auf R in $n - 1$ Eliminations-Stufen, wobei gleichzeitig „auf der rechten Seite“ die Matrix L^{-1} aufgebaut wird. Das reduzierte Gleichungssystem $R X = L^{-1}$ kann dann leicht nach X aufgelöst werden. Bei dem Übergang von einer Eliminations-Stufe zur folgenden werden Rundungsfehler gemacht, die man zu einer quadratischen Matrix der Ordnung n anordnen kann. Die Summe dieser $n - 1$ Matrizen heiße F . Ebenso sei G die entsprechend aus den bei der Berechnung von L^{-1} vorkommenden Rundungsfehlern gebildete Matrix und H die analoge Matrix für die Berechnung von X . Der in den Rundungsfehlern lineare Anteil des Fehlers $\bar{X} - X$ ist dann $F_1 = -\bar{X} F \bar{X} + \bar{X} G + S H$, worin $S = (\bar{R})^{-1} \bar{D}$ gesetzt ist. \bar{R} ist das numerische Resultat der Elimination und \bar{D} die Diagonalmatrix der Diagonalelemente von \bar{R} . Außerdem steht, bei geeigneter Anordnung des Algorithmus, die numerische Matrix \bar{Q} , eine Näherung für $Q = L D$, nach der Rechnung zur Verfügung. Mit der Bezeichnung $|M| =$ Betrag des größten Elementes von M gelte $|S| \leq 1,3 n |\bar{Q}| |\bar{X}|$. Für die individuellen Rundungsfehler, aus denen die Matrizen F , G und H aufgebaut sind, seien Schranken ϱ_1 , ϱ_2 und ϱ_3 bekannt. Dann gilt die Abschätzung

$$|F_1| \leq \left\{ \frac{n^3}{2} \varrho_1 |\bar{X}| + \frac{n^2}{2} \varrho_2 + 1,3 n^2 \varrho_3 |\bar{Q}| \right\} |\bar{X}|$$

für den linearen Anteil des Fehlers. Der folgende Satz besagt nun im wesentlichen, daß der Gesamtfehler klein ist, falls der lineare Anteil klein ist.

Satz. Es sei δ eine positive Zahl derart, daß

$$\frac{n^3}{2} \varrho_1 |\bar{X}| + \frac{n^2}{2} \varrho_2 + 1,3 n^2 \varrho_3 |\bar{Q}| \leq \delta$$

ist und

$$1. \quad \delta \leq 0,1; \quad 2. \quad n |(\bar{D})^{-1} \bar{R} - I| \leq \frac{1 - \delta - 4,5 \delta^2}{(1 + 4,4 \delta) \delta^2}.$$

Dann existiert die Inverse X , und es gilt

$$\bar{X} - X = -\bar{X} F \bar{X} + \bar{X} (G + G_1) + S(H + H_1)$$

mit Matrizen G_1 und H_1 , die den Ungleichungen

$$|G_1| \leq 4,4 (n - 1) \left\{ \frac{n^2}{2} \varrho_1 |\bar{X}| + \frac{n}{2} \varrho_2 \right\} \left\{ \frac{n^2}{2} \varrho_1 |\bar{X}| + \frac{n}{2} \varrho_2 + 1,3 n \varrho_3 |\bar{Q}| \right\},$$

$$|H_1| \leq 4,4 (n - 1) \varrho_3 \left\{ \frac{n^2}{2} \varrho_1 |\bar{X}| + \frac{n}{2} \varrho_2 + 1,3 n \varrho_3 |\bar{Q}| \right\}$$

genügen. Ferner ist

$$|S| \leq (1 + 3 \delta) n |\bar{Q}| |\bar{X}|.$$

Korollar: Es gilt

$$|\bar{X} - X| \leq (1 + 4,4 \delta) \delta |\bar{X}|.$$

Bemerkungen: Es wird in diesem Satz nicht vorausgesetzt, daß A nicht singulär sei; die Existenz von X wird mitbewiesen. Die Voraussetzungen 1) und 2) über δ sind sehr milde; insbesondere wird δ bei einer sinnvollen Rechnung viel kleiner als 0,1 sein. Die Voraussetzung 2) dient nur dazu, die Aussage über $|S|$ zu ermöglichen, die für die Anwendbarkeit des Satzes von entscheidender Bedeutung ist. Wird bei der Dreieckszerlegung durch Vertauschung von Zeilen und Spalten das jeweils größte Element der Stufe zum Eliminationselement (pivot) gemacht, so ist $|(\bar{D})^{-1} \bar{R} - I| \leq 1$. Der Beweis des Satzes wird an anderer Stelle veröffentlicht.

Anschrift: Doz. Dr. K. JÖRGENS, Heidelberg, Trübnerstr. 22

Optimale Kollokation für lineare Integralgleichungen 2. Art

VON HORST KADNER

Gegenstand der Untersuchung ist die lineare inhomogene Integralgleichung 2. Art:

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds = f(x) \quad (a \leq x \leq b) \quad (1)$$

mit den Eigenschaften:

1. Der Kern $K(x, s) \equiv 0$ ist im Grundgebiet reell, quadratisch integrierbar bezüglich s und von mittlerer Stetigkeit in x .

2. Die Störfunktion $f(x) \equiv 0$ ist reell und stetig.

3. Der Parameter λ ist reell und nicht Eigenwert.

Mit dem Defekt $d(x)$, der durch Einführen einer Näherungslösung $w(x)$ in (1) entsteht, kann zunächst die mittlere quadratische Abweichung von der Lösung $y(x)$ abgeschätzt und damit eine Beziehung erhalten werden:

$$\int_a^b (y(x) - w(x))^2 dx \leq \int_a^b d^2(x) dx \cdot \text{const} \quad (2),$$

die Ausgangspunkt für die folgende numerisch-theoretische Behandlung ist. Als Näherungslösung wird zweckmäßig ein linearer Ansatz

$$w_n(x, c_1, \dots, c_n) = \sum_{j=1}^n c_j u_j(x) \quad (3)$$

mit unbestimmten Koeffizienten verwendet; die Ansatzfunktionen müssen dabei folgenden Bedingungen genügen:

a) Die Funktionen $u_j(x)$ ($j = 1, \dots, n$) sind reell, stetig und linear unabhängig.

b) Das System $\{u_j(x)\}$ ist im quadratischen Mittel vollständig.

Durch Einsetzen von (3) in (1) ergibt sich:

$$\begin{aligned} d_n(x) &= \sum_{j=1}^n c_j \left(u_j(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) u_j(s) ds \right) - f(x) = \sum_{j=1}^n c_j r_j(x) - f(x) \\ &= \sum_{j=0}^n c_j r_j(x) \quad (c_0 = -1, r_0 \equiv f). \end{aligned}$$

Die transformierten Ansatzfunktionen $r_j(x)$ ($j = 1, \dots, n$) sind mit den Eigenschaften der $u_j(x)$ stetig, linear unabhängig und im quadratischen Mittel vollständig, so daß für (2) die Fehlerquadratmethode durchgeführt werden kann:

$$\int_a^b d_n^2(x) dx = \text{Min} \quad (4).$$

Die Anwendung von Mittelwertformeln mit positiven Gewichten auf (4) — für positive Gewichte ist die Konvergenz gesichert — führt unter vorläufiger Vernachlässigung der Quadraturfehler auf:

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n c_i c_j \left(\sum_{p=1}^m A_p r_i(x_p) r_j(x_p) \right) = \text{Min}.$$

Die notwendige Bedingung für das Minimum ergibt ein lineares Gleichungssystem mit den Unbekannten c_j ($j = 1, \dots, n$). Insbesondere stellt der Fall $m = n$ ein allgemeines Interpolationsverfahren dar, bei dem

$$d_n(x_p) = 0 \quad \text{für} \quad p = 1, \dots, n \quad \text{gilt.}$$

Das entspricht jedoch der üblichen Kollokationsforderung; die Kollokationsstellen können damit als Stützstellen von Mittelwertformeln mit positiven Gewichten betrachtet werden. Nach einer Transformation von $[a, b]$ auf $[-h, +h]$ zeigt eine Fehleruntersuchung¹⁾ für (2), daß die Fehlerschranke im wesentlichen durch

$$n \Delta^{(n)} = n \cdot \text{Max}_{i,j} \left| \int_{-h}^{+h} \varrho_i(x) \varrho_j(x) dx - \sum_{p=1}^n A_p \varrho_i(x_p) \varrho_j(x_p) \right|$$

¹⁾ H. KADNER, Untersuchungen zur Kollokationsmethode, ZAMM 40 (1960), S. 99—113.

bestimmt wird. Dabei sind $\varrho_i(x)$ ($i = 1, \dots, n$) orthonormierte mit (1) transformierte Ansatzfunktionen. Neben der hinreichenden Konvergenzbedingung:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \Delta^{(n)} = 0 \quad \dots \dots \dots (5)$$

läßt sich folgern, daß i. a. die Stützstellen der GAUSSschen Quadraturformel — also die Nullstellen der LEGENDRESchen Polynome — optimale Kollokation gestatten. Für numerische Zwecke stören jedoch die erforderlichen Integrationen für $r_j(x)$. Sie können unter der Zusatzvoraussetzung, daß $K(x, s)$ bezüglich x und s stetig ist, durch die bereits verwendete Mittelwertformel näherungsweise ersetzt werden. Der neue Defekt $\tilde{d}_n(x)$ lautet dann:

$$\tilde{d}_n(x) = \sum_{j=1}^n \tilde{c}_j \{ u_j(x) - \lambda \sum_{p=1}^n A_p K(x, s_p) u_j(s_p) \} - f(x).$$

Mit der hinreichenden Konvergenzbedingung (5) sind Stetigkeit, lineare Unabhängigkeit und Vollständigkeit im quadratischen Mittel der neuen transformierten Ansatzfunktionen gesichert. Im Hinblick auf die gleichmäßige Konvergenz der Näherungslösung lassen sich geeignete Kollokationsansätze konstruieren, die auch numerischen Ansprüchen weitestgehend genügen. Allerdings müssen dann die eingangs erklärten Voraussetzungen verschärft werden. Geeignet erscheinen Ansatzfunktionen, die der verwendeten Mittelwertformel unmittelbar zugeschnitten sind. Mit einer diesbezüglichen Betrachtung der LAGRANGESchen Interpolationsformel können die Polynome

$$u_j(x) = \frac{l_j^{(n)}(x)}{\sqrt{A_j^{(n)}}} = \frac{1}{\sqrt{A_j^{(n)}}} \frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_j^{(n)}) (x - x_j^{(n)})} \quad (j = 1, \dots, n)$$

($\omega_n(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i^{(n)})$, $x_i^{(n)}$ ($i = 1, \dots, n$): Nullstellen des LEGENDRESchen Polynoms n -ten Grades) als Ansatzfunktionen gewählt werden. Sie sind orthonormal,

$$\int_{-h}^{+h} u_j(x) u_k(x) dx = \sum_{p=1}^n A_p^{(n)} u_j(x_p^{(n)}) u_k(x_p^{(n)}) = \delta_{jk},$$

und nehmen an den Stützstellen der Mittelwertformel die Werte

$$u_j(x_p^{(n)}) = \begin{cases} 1 & j = p, \\ \frac{1}{\sqrt{A_j^{(n)}}} & j \neq p \end{cases}$$

an. Das durch Kollokation entstehende Gleichungssystem ist mit dem Gleichungssystem im Verfahren von NYSTRÖM identisch.

Für gleichmäßige Konvergenz muß zusätzlich vorausgesetzt werden: $K(x, s)$ stetig bezüglich x und s , stetige Ableitungen: $\frac{\partial K(x, s)}{\partial x}$, $\frac{\partial K(x, s)}{\partial s}$, $\frac{\partial^2 K(x, s)}{\partial s^2}$, $f'(x)$.

Falls man nicht von einer Interpolationsquadratur ausgeht, bietet sich eine andere Möglichkeit für ein einfaches orthonormiertes System von Ansatzfunktionen:

$$u_j(x) = \frac{\varphi_j^{(n)}(x)}{\sqrt{\Delta x_j^{(n)}}}, \quad \varphi_j^{(n)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{in } x_{j-1}^{(n)} \leq x < x_j^{(n)}, \\ 0 & \text{sonst in } [-h, +h], \end{cases} \quad \Delta x_j^{(n)} = x_j^{(n)} - x_{j-1}^{(n)}, \quad (j = 1, \dots, n),$$

$$\varphi_n^{(n)}(h) = 1.$$

Die Unstetigkeit dieser Ansatzfunktionen gestattet nicht die Anwendung der GAUSSschen Quadraturformel. Um hier optimale Verhältnisse zu erhalten, benutzt man zweckmäßig eine gleichmäßige Intervallteilung und als Kollokationsstellen die Mitten eines jeden Teilintervalls. Das Gleichungssystem bei Kollokation nimmt die Gestalt wie im NYSTRÖMSchen Verfahren an; die Bedingung (5) ist hier stets erfüllt und die zusätzliche Voraussetzung für gleichmäßige Konvergenz lautet:

$$K(x, s) \text{ bezüglich } x \text{ und } s \text{ stetig.}$$

Es sei bemerkt, daß die Behandlung der VOLTERRAschen Integralgleichung 2. Art analog durchgeführt werden kann.

Defektabschätzungen

Von RUDOLF KRAWCZYK

Die Konvergenzuntersuchung der nach einem Differenzenverfahren ermittelten Näherungslösung einer parabolischen Randwertaufgabe

$$\left. \begin{aligned} z_x - f(x, y, z, z_y, z_{yy}) &= 0 \quad \text{in } G + \Gamma_1^1 \\ z - \zeta &= 0 \quad \text{auf } \Gamma \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

kann mit Hilfe einer Defektabschätzung durchgeführt werden. Der Beweisgang einer solchen Defektabschätzung, die auch für andere Beispiele von Bedeutung ist, wird in abstrakter Form skizziert.

Es seien μ_1, μ_2, \dots Elemente eines halbgeordneten Raumes \mathfrak{M} und ν_1, ν_2, \dots Elemente eines halbgeordneten Raumes \mathfrak{N} . (\mathfrak{M} und \mathfrak{N} sind im allgemeinen Banachräume.)

Der Operator T bilde die Elemente u eines Raumes \mathfrak{R} in einen Raum \mathfrak{S} ab. Jedem Elementenpaar $u, v \in \mathfrak{R}$ sei ein Element $\mu(u, v) \in \mathfrak{M}$ und ein Element $\nu(Tu, Tv) \in \mathfrak{N}$ zugeordnet. (Im allgemeinen handelt es sich um die (verallgemeinerten) Abstände der Elemente u und v sowie Tu und Tv im Sinne der in [3] gegebenen Definition, d. h. \mathfrak{R} bzw. \mathfrak{S} ist ein \mathfrak{M} - bzw. \mathfrak{N} -metrischer Raum.)

$w \in \mathfrak{R}$ sei die Lösung der Gleichung

$$Tw = a \dots \dots \dots (2)$$

mit gegebenem $a \in \mathfrak{S}$ und $u \in \mathfrak{R}$ eine Näherungslösung. $\nu(Tu, a)$ werde als (verallgemeinerter) Defekt bezeichnet. Die Aufgabe besteht nun darin, den Abstand $\mu(u, v)$ der Näherungslösung von der exakten Lösung mit Hilfe des Defektes $\nu(Tu, a)$ oder einer oberen Schranke abzuschätzen. Durch die Bedingung

$$\nu(Tu, Tv) \geq M \mu(u, v) \quad \text{für } u, v \in \mathfrak{R} \dots \dots \dots (3)$$

werde eine Beziehung zwischen den Elementen der Räume \mathfrak{R} und \mathfrak{S} zu den Elementen der Räume \mathfrak{M} und \mathfrak{N} hergestellt. Dabei sei M ein Operator monotoner Art, welcher eine Teilmenge $\mathfrak{D}_M \in \mathfrak{M}$ in \mathfrak{R} abbilde, d. h. aus

$$M\mu_1 \geq M\mu_2 \quad \text{folge} \quad \mu_1 \geq \mu_2 \quad \text{für } \mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{D}_M \dots \dots \dots (4).$$

Genügt p der Ungleichung

$$Mp \geq \nu(Tu, a) \dots \dots \dots (5),$$

so gilt die Abschätzung

$$\mu(u, w) \leq p \dots \dots \dots (6),$$

was unmittelbar aus (2), (3) und (4) folgt.

Diese Überlegungen werden auf Differenzenoperatoren angewandt. $u \in \mathfrak{R}$ sei ein Vektor, dessen Komponenten $\{u_{i,k}\}$ die auf $(x_i, y_k) \in P$ (endliche Punktmenge eines Gitters) gegebenen Werte sind. $Tu \in \mathfrak{R}$ (\mathfrak{R} und \mathfrak{S} fallen zusammen) sei folgendermaßen definiert:

$$Tu \equiv \left\{ \begin{aligned} \frac{\Delta u_{i,k}}{h} - f[u_{i,k}] & \quad \text{für } (x_i, y_k) \in P_I \\ u_{i,k} - \zeta_{i,k} & \quad \text{für } (x_i, y_k) \in P_R \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7);$$

dabei bedeuten:

$$f[u_{i,k}] = f\left(x_{i-1}, y_k, u_{i-1,k}, \frac{\delta u_{i-1,k}}{2l}, \frac{\nabla^2 u_{i-1,k+1}}{l^2}\right),$$

wobei $f(x, y, r, s, t)$ die in (1) benutzte Funktion ist und die Voraussetzungen (1,1), (1,2), (1,3) aus [1] sowie

$$\begin{aligned} & f(x_{i-1}, y_k, r_1, s, t) - f(x_{i-1}, y_k, r_2, s, t) \\ & \leq \omega(x_{i-1}, r_1 - r_2) \quad \text{für } r_1 \geq r_2 \quad \text{und } (x_i, y_k) \in P_I \dots \dots \dots (8) \end{aligned}$$

erfüllt sind;

$$\begin{aligned} \Delta u_{i,k} &= u_{i,k} - u_{i-1,k}; \quad \delta u_{i,k} = u_{i,k+1} - u_{i,k-1}; \\ \nabla^2 u_{i,k+1} &= u_{i,k+1} - 2u_{i,k} + u_{i,k-1}; \end{aligned}$$

h und l sind die Maschenweiten des Punktgitters, P_I die Menge der inneren Punkte, P_R die Menge der Randpunkte.

¹⁾ G, Γ und Γ_1^1 seien wie in [2] festgelegt.

Sind $u = \{u_{i,k}\}$ und $v = \{v_{i,k}\}$ zwei Elemente aus \mathfrak{R} , so definieren wir mit $u_{i,k} - v_{i,k} = \varphi_{i,k}$

$$\mu(u, v) = (\bar{\varphi}_i) = \max_{k, j \leq i} |\varphi_{j,k}| \quad (i = 0, 1, \dots) \quad (9)$$

und mit

$$\hat{\varphi}_i = \max_k |\varphi_{i,k}| \quad \text{für } (x_i, y_k) \in P_R \quad (i = 0, 1, \dots)$$

$$\nu(Tu, Tv) = \begin{cases} \varphi_0 & \text{für } i = 0 \\ \max_k \left| \frac{\Delta \varphi_{i,k}}{k} - (f[u_{i,k}] - f[v_{i,k}]) \right| & \text{falls } \bar{\varphi}_i > \hat{\varphi}_i \\ (1 - \lambda) \frac{\Delta \hat{\varphi}_i}{h} - \omega(x_{i-1}, \hat{\varphi}_{i-1}) & \text{falls } \bar{\varphi}_i = \hat{\varphi}_i \end{cases} \quad (10)$$

(dabei ist $\lambda < 1$ nach 1.1 in [1] erklärt).

μ und ν sind demnach Vektoren mit Komponenten, welche nur von i abhängen. $\mu \geq 0$ bedeutet: alle Komponenten von μ sind größer als oder mindestens gleich Null. Dasselbe gilt für $\nu \geq 0$. Definieren wir noch

$$M\mu = \left\{ \begin{array}{l} \hat{\varphi}_0 \\ (1 - \lambda) \frac{\Delta \bar{\varphi}_i}{h} - \omega(x_{i-1}, \bar{\varphi}_{i-1}) \quad (i = 1, 2, \dots) \end{array} \right\} \quad (11),$$

so sind (3) und (4) unter den Voraussetzungen (1,1) bis (1,3) aus [1] und (8) erfüllt. Damit erhalten wir folgende Abschätzung:

Es sei $w = \{w_{i,k}\}$ die exakte Lösung der Differenzengleichung $Tw = 0$ und $u = \{u_{i,k}\}$ eine Näherungslösung; in unserem Fall sei u die exakte Lösung von (1) auf P . Gilt

$$\max_k \left| \frac{\Delta u_{i,k}}{h} - f[u_{i,k}] \right| \leq E_i \quad \text{und} \quad (1 - \lambda) \frac{\Delta \hat{\varphi}_i}{h} - \omega(x_{i-1}, \hat{\varphi}_{i-1}) \leq E_i \quad (12)$$

$$\text{mit } \hat{\varphi}_i = \max_k |u_{i,k} - w_{i,k}| \quad \text{für } (x_i, y_k) \in P_R$$

und genügen die p_i der gewöhnlichen Differenzengleichung

$$(1 - \lambda) \frac{\Delta p_i}{h} - \omega(x_{i-1}, p_{i-1}) \geq E_i \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (13)$$

$$\text{mit } p_0 \geq \varphi_0,$$

so folgt nach (6)

$$|u_{i,k} - w_{i,k}| \leq p_i \quad \text{für } (x_i, y_k) \in P \quad (14).$$

Um Konvergenzaussagen zu machen, muß gezeigt werden, daß unter gewissen Voraussetzungen über $f(x, y, r, s, t)$ und die Lösung von (1) $E_i \rightarrow 0$ strebt, wenn die Maschenweiten h und l nach Null gehen. Die Konvergenz von $p_i \rightarrow 0$ hängt im wesentlichen von der in (8) benutzten Funktion $\omega(x, z)$ ab. Ist $\omega(x, z)$ in z schwach monoton wachsend, stetig in x und z in einer gewissen Umgebung von $z = 0$, besitzt außerdem die Anfangswertaufgabe

$$z' = \omega(x, z), \quad z(x_0) = 0 \quad \text{nur die Lösung } z \equiv 0,$$

so konvergieren die p_i mit kleiner werdenden Maschenweiten gegen Null. (x_0 ist Anfangswert für $i = 0$.)

Zusätzliche Bemerkung: Setzt man in (7)

$$f[u_{i,k}] = f\left(x_i, y_k, u_{i,k}, \frac{\delta u_{i,k}}{2l}, \frac{\nabla^2 u_{i,k+1}}{l^2}\right),$$

d. h. benutzt man anstelle des rückwärtsgenommenen Differenzenquotienten den vorwärtsgenommenen, so vereinfachen sich die Voraussetzungen. Dafür wird die numerische Behandlung erschwert, da man zur Bestimmung der $w_{i,k}$ für jedes i ein (im allgemeinen) nichtlineares Gleichungssystem zu lösen hat.

Literatur

- [1] R. KRAWCZYK, Konvergenz des Differenzenverfahrens bei partiellen Differentialgleichungen vom parabolischen Typ. ZAMM 39 (1959), S. 374—375.
- [2] K. NICKEL, Fehlerabschätzungen bei parabolischen Differentialgleichungen. Math. Zeitschr. 71 (1959), S. 268—282.
- [3] J. SCHRÖDER, Nichtlineare Majoranten beim Verfahren der schrittweisen Näherung. Arch. Math. 7 (1956), S. 471—484.

Anschrift: Stud. Ass. RUDOLF KRAWCZYK, Karlsruhe, Königsbergerstr. 27 b

Konforme Abbildung durch die Lösungen der Differentialgleichung der Tschebyschewschen Polynome

Von ULRICH KULISCH

Es wird die konforme Abbildung aller Lösungen der Differentialgleichung

$$(z^2 - 1) w'' + z w' - n^2 w = 0 \quad (1)$$

untersucht. Dabei ist n ein reeller Parameter, z und w sind komplexe Veränderliche. Die Lösungsfunktion wird mit $w = F_n(z)$ bezeichnet. Sie wird festgelegt durch die im Punkte $z_0 = 0$ vorgegebenen Anfangswerte $w_0 = F_n(0)$ und $w'_0 = F'_n(0)$.

Durch einmalige Integration der Differentialgleichung (1) folgt, daß die Lösungsfunktionen $F_n(z)$ für beliebiges z bei festem n der Beziehung

$$F_n^2(z) + 1/n^2 (1 - z^2) F_n'^2(z) \equiv k = \text{const} \quad (2)$$

genügen. Damit läßt sich die Mannigfaltigkeit aller Lösungen von (1) so in zwei wesentlich verschiedene Klassen einteilen, daß entweder $k \neq 0$ oder $k = 0$ ist. Im Falle $k \neq 0$ kann man eine gewisse Normierung durch Multiplikation der Anfangswerte mit $1/\sqrt{k}$ vornehmen. Damit reduziert sich wegen der Homogenität der Differentialgleichung auch die Lösungsfunktion auf den \sqrt{k} -ten Teil. Für die konforme Abbildung bedeutet dies lediglich eine Drehstreckung in der w -Ebene. Die so reduzierten Funktionen der Klasse $k \neq 0$ liefern dann alle den Wert $k = 1$.

Bei der Untersuchung der konformen Abbildung der Funktionen $F_n(z)$ wird wie üblich so vorgegangen, daß ein gewisses Kurvennetz der z -Ebene in die w -Ebene abgebildet wird. Dabei ist es wesentlich, in der z -Ebene gerade solche Kurven zu wählen, mit deren Hilfe sich die konforme Abbildung besonders einfach untersuchen läßt. Für eine Kurve der z -Ebene ist $z = z(t)$. Die Bildkurve lautet dann $w(z(t)) = F_n(z(t))$. Da die Untersuchung der konformen Abbildung einer analytischen Funktion auf Grund einer expliziten Darstellung der Funktion in der Regel auf große numerische Schwierigkeiten führt, wird sie hier durchgeführt auf Grund der Differentialgleichung. Längs der als analytisch vorausgesetzten Kurve $z(t)$ ist $w' = \dot{w}/\dot{z}$ und $w'' = (\ddot{z}\dot{w} - \dot{z}\ddot{w})/\dot{z}^3$. Durch Einsetzen der Kurve $z(t)$ und dieser Beziehungen in (1) erhält man die Differentialgleichung der Bildkurve:

$$(z^2(t) - 1) \dot{z}(t) \ddot{w} + \{z(t) \ddot{z}(t) - (z^2(t) - 1) \dot{z}(t)\} \dot{w} - n^2 \dot{z}^3(t) w = 0 \quad (3)$$

Um die Bildkurve eindeutig festzulegen, müssen noch die Anfangswerte z. B. im Punkte $t = 0$: $w(z(0)) = F_n(z(0))$ und $\dot{w}(z(0)) = F'_n(z(0)) \dot{z}(0)$ berechnet werden.

Die Differentialgleichung (3) vereinfacht sich sofort wesentlich, wenn man, wie bereits angedeutet, in der z -Ebene spezielle Kurvenscharen annimmt. Hier eignet sich besonders das orthogonale Netz der Ellipsen und Hyperbeln mit gemeinsamen Brennpunkten bei $z = \pm 1$;

$$\begin{aligned} z_1(t) &= a \cos t + i b \sin t & \text{bzw.} & & z_2(t) &= \alpha \cos t + i \beta \sin t & \dots \dots (4) \\ \text{mit } a^2 - b^2 &= 1, b \geq 0 & \text{und} & & \alpha^2 + \beta^2 &= 1, \beta \geq 0 \end{aligned}$$

Die Kurvenscharen (4) genügen der Differentialgleichung

$$\ddot{z} + z = 0 \quad \text{bzw.} \quad \ddot{z} - z = 0$$

Nach einmaliger Integration und Bestimmung der Integrationskonstanten mittels (4) erhält man:

$$z^2 + \dot{z}^2 = 1 \quad \text{bzw.} \quad z^2 - \dot{z}^2 = 1$$

Damit nimmt (3) die wesentlich einfachere Form an:

$$\ddot{w} + n^2 w = 0 \quad \text{bzw.} \quad \ddot{w} - n^2 w = 0 \quad (3')$$

Integration dieser Gleichungen und anschließende Berechnung der Integrationskonstanten mit Hilfe der Anfangswerte liefert schließlich die Bildkurven von (4):

$$w(z_1(t)) = F_n(a) \cos n t + i \frac{b}{n} F'_n(a) \sin n t; \quad w(z_2(t)) = F_n(\alpha) \cos n t + i \frac{\beta}{n} F'_n(\alpha) \sin n t \quad (5).$$

Bei den Kurven $w(z_1(t))$ handelt es sich wieder um Ellipsen, dargestellt durch die konjugierten Durchmesser $F_n(a)$ und $i b/n F'_n(a)$. Im Falle $k = 1$ sind diese Ellipsen ebenfalls konfokal. Sie besitzen gemeinsame Brennpunkte bei $w = \pm 1$. Im Falle $k = 0$ sind die konjugierten

Durchmesser gleichlang und orthogonal. Die Ellipsen entarten also in konzentrische Kreise um den Nullpunkt. Die Kurven $w(z(t))$ sind jeweils die Orthogonaltrajektorien, im 1. Fall also konfokale Hyperbeln mit gemeinsamen Brennpunkten bei $w = \pm 1$, im 2. Fall gerade Linien durch den Nullpunkt der w -Ebene.

Ist speziell n eine natürliche Zahl, so sind die TSCHEBYSCHESCHEN Polynome $T_n(z)$ und die TSCHEBYSCHESCHEN Funktionen 2. Art $U_n(z)$ linear unabhängige Lösungen von (1). Aus (2) folgt, daß sowohl die Funktionen $T_n(z)$, als auch die Funktionen $U_n(z)$ der Klasse $k = 1$ angehören. Die Funktionen der Klasse $k = 0$ haben, falls n eine natürliche Zahl ist, folgendes Aussehen:

$$W_n(z) = T_n(z) \pm i U_n(z),$$

also

$$W_1(z) = z \pm \sqrt{z^2 - 1},$$

$$W_2(z) = 2z^2 - 1 \pm \sqrt{z^2 - 1} 2z,$$

$$W_3(z) = 4z^3 - 3z \pm \sqrt{z^2 - 1} (4z^2 - 1),$$

usw.

Die Formel für $W_1(z)$ läßt sich nach z auflösen. Es ergibt sich $z = 1/2 (w + 1/w)$, also gerade die KUTTA-JOUKOWSKI-Abbildung. Alle weiteren Funktionen $W_n(z)$ sind entsprechend Verallgemeinerungen dieser KUTTA-JOUKOWSKI-Abbildung. Sie lassen sich auch in der Form schreiben: $T_n(z) = 1/2 (w + 1/w)$. Es ist $T_1(z) = z$. Zusammenfassend erhält man den folgenden

Satz: Die Mannigfaltigkeit aller Lösungen $w = F_n(z)$ von (1) läßt sich bis auf Drehstreckungen in der w -Ebene so in zwei wesentlich verschiedene Klassen einteilen, daß entweder $k = 1$ oder $k = 0$ ist. Im Fall $k = 1$ werden die konfokalen Ellipsen und Hyperbeln (4) mit gemeinsamen Brennpunkten bei $z = \pm 1$ abgebildet auf ebenfalls konfokale Ellipsen und Hyperbeln der w -Ebene wieder mit gemeinsamen Brennpunkten bei ± 1 . Speziell fallen, falls n eine natürliche Zahl ist, die TSCHEBYSCHESCHEN Polynome $T_n(z)$ und die TSCHEBYSCHESCHEN Funktionen 2. Art $U_n(z)$ in diese Klasse. Im Falle $k = 0$ wird das orthogonale Netz (4) abgebildet auf konzentrische Kreise um den Nullpunkt und gerade Linien durch den Nullpunkt der w -Ebene. Spezielle Funktionen dieser Art sind, falls n eine natürliche Zahl ist, die Funktionen $W_n(z) = T_n(z) \pm i U_n(z)$. Sie können als Verallgemeinerungen der KUTTA-JOUKOWSKI-Abbildung auch in der Form $T_n(z) = 1/2 (w + 1/w)$ geschrieben werden.

Auf Grund dieses Satzes und der Beziehungen (4) und (5) lassen sich die konformen Abbildungen der Funktionen $T_n(z)$ und $U_n(z)$, sowie der Funktionen $W_n(z)$ in allen Einzelheiten diskutieren.

Anschrift: Dipl.-Math. U. KULISCH, Walchstadt Nr. 31, Post Steinebach am Wörthsee Obb.

Eine Erweiterung des Nagumo-Westphalschen Lemmas für parabolische Differentialgleichungen

Von KARL NICKEL

Das NAGUMO-WESTPHALSCHES Lemma hat sich in den letzten Jahren als grundlegend für Aussagen über die Lösungen parabolischer Differentialgleichungen erwiesen. Es lassen sich damit u. a. Fehlerabschätzungen durchführen, Stabilitätskriterien angeben und Eindeutigkeitssätze beweisen. In den Anwendungen kommen auch Differentialgleichungen vor für eine Funktion von m unabhängigen Orts-Veränderlichen, die in l von diesen von erster Ordnung und nur in den $m - l$ restlichen Koordinaten von zweiter Ordnung und parabolisch sind. Ein Beispiel dafür ist die Grenschichtdifferentialgleichung für instationäre laminare zweidimensionale Grenschichten eines inkompressiblen Mediums mit $m = 2$, $l = 1$. Ebenfalls zu diesen Gleichungen gehören die beiden Sonderfälle der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung und der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Das NAGUMO-WESTPHALSCHES Lemma wurde auf diese allgemeine Klasse von Differentialgleichungen mit den zugehörigen Anfangs- und Randbedingungen erweitert. Als Beispiel wurde zum ersten Male ein Eindeutigkeitssatz für die erwähnten Grenschichten bewiesen. Eine ausführliche Note darüber erscheint demnächst in der Mathematischen Zeitschrift.

Anschrift: Doz. Dr. KARL NICKEL, Karlsruhe, Brettenerstraße 9

Fehlerabschätzungen bei der numerischen Integration elliptischer Differentialgleichungen

Von JOACHIM NITSCHKE

Betrachtet wird das Randwertproblem der linearen elliptischen Differentialgleichung

$$L(U) \equiv a U_{xx} + 2b U_{xy} + c U_{yy} = f(x, y)$$

für das Quadrat $S: (0 < x, y < 1)$ mit verschwindenden Randwerten. Die Koeffizienten a, b, c werden als stetig in \bar{S} angenommen und $a^2 - b^2 > 0$ vorausgesetzt. $f(x, y)$ sei stetig oder wenigstens quadratisch integrierbar. Das Randwertproblem wird durch ein System von Differenzengleichungen $L_{ik}(U^h) = F_{ik}$ für eine Gitterfunktion $U^h = (U_{ik})$, definiert in den Gitterpunkten P_{ik} eines quadratischen Gitters der Seitenlänge $h = 1/N + 1$, ersetzt. Für F_{ik} werden bei stetigem f die Funktionswerte $f(ih, kh)$ oder allgemeiner geeignete Mittelwerte gesetzt. — Die folgende Fehlerabschätzung wird abgeleitet

$$(*) \quad \max_{1 \leq i, k \leq N} |U(ih, kh) - U_{ik}| \leq C \{ \varepsilon_\rho(f) + \|f\| (\varepsilon_\rho(a, b, c) + h^2 \cdot \rho^{-4}) \}.$$

Hierbei ist $\|f\|$ die L_2 -Norm von f , und ε_ρ bedeutet den Stetigkeitsmodul in Rechtecken der Seitenlänge ρ . Ist f nur quadratisch integrierbar, so muß das Glied $\varepsilon_\rho(f)$ durch die Gitternorm $\|F - \omega_\rho^2(f)\|_\rho$ ersetzt werden. Dabei ist für eine Gitterfunktion $W = (W_{ik})$ definiert $\|W\|_\rho^2 = h^2 \sum W_{ik}^2$, ω_ρ^2 bedeutet die zweimalige Glättung über Quadrate der Seitenlänge ρ . C ist eine numerische Konstante, die nur von den Konstanten der Elliptizität des Operators L abhängt. — Mit $\rho = h^{2/5}$ liefern die zwei letzten Glieder in $(*)$ $2h^{2/5}$, und die rechte Seite in $(*)$ strebt gegen Null für $h \rightarrow 0$.

Die vollständige Arbeit wird, gemeinsam mit JOHANNES NITSCHKE publiziert, im Arch. Rat. Mech. Anal. erscheinen.

Anschrift: Prof. Dr. JOACHIM NITSCHKE, Freiburg i. Br., Hasenweg 44

Lösung einer Volterraschen Integralgleichung zweiter Art und die Integration gewisser linearer Differentialgleichungen

Von MANFRED SCHOCH*)

Gewisse Randwertaufgaben gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen der Form

$$y^{(n)}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} b_i(x) y^{(i)}(x) = f(x) \quad \dots \dots \dots (1)$$

lassen sich nach einem Verfahren, das von A. KNESCHKE [1] entwickelt und vom Verfasser [2], [3] verallgemeinert wurde, ohne Kenntnis eines Fundamentalsystems der homogenen Gleichung in äquivalente Integralgleichungen überführen. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Koeffizienten $b_i(x)$ in einem Intervall $[a, b]$ stetig differenzierbar sind, während $f(x)$ dort stetig sein soll.

Für den einfachen Fall der Anfangswertaufgabe erhalten wir als Äquivalent eine VOLTERRASche Integralgleichung zweiter Art mit ausgeartetem Kern. Der Rang des Kernes stimmt im allgemeinen mit der Ordnung der Differentialgleichung überein. Wenn jedoch zwischen den Koeffizienten $b_i(x)$ der Differentialgleichung gewisse Beziehungen bestehen, dann reduziert sich der Rang auf eins. In diesem Falle erhalten wir eine Integralgleichung der Gestalt

$$y(x) + P(x) \int_a^x Q(\xi) y(\xi) d\xi = g(x); \quad a \leq x \leq b \quad \dots \dots \dots (2)$$

wobei die Funktionen $P(x)$, $Q(x)$ und $g(x)$ in $[a, b]$ stetig sind.

Durch Berechnen sämtlicher iterierten Kerne gelingt es, die Resolvente geschlossen darzustellen und die Lösung von (2) in Integralform

$$y(x) = g(x) - P(x) \int_a^x Q(\xi) e^{\int_\xi^x P(t) Q(t) dt} g(\xi) d\xi \quad \dots \dots \dots (3)$$

anzugeben.

*) Institut für Angewandte Mathematik der Bergakademie Freiberg.

Wir untersuchen jetzt die Klasse der Differentialgleichungen

$$y^{(n)}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{N^{(n-i-1)}(x)}{N(x)} A(x) y(x) \right]^{(i)} = f(x) \quad \dots \quad (4).$$

Dabei soll

$$N(x) = \sum_{j=0}^{n-1} d_j x^{n-j-1} \quad \dots \quad (5)$$

ein beliebiges Polynom höchstens $(n-1)$ -ten Grades sein, während $A(x)$ eine willkürliche Funktion darstellt. Wir setzen voraus, daß $f(x)$ in $[a, b]$ stetig ist und daß $A(x)$ und $N(x)$ so beschaffen sind, daß die Ausdrücke

$$\frac{N^{(n-j-1)}(x)}{N(x)} A(x); \quad j = 0, 1, \dots, n-1$$

in $[a, b]$ j -mal stetig differenzierbar sind. Auf Grund dieser Voraussetzungen erfüllt (4) die an (1) gestellten Forderungen.

Durch Anwenden des Operators

$$\int_a^x \frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!} \dots d\xi \quad \dots \quad (6)$$

auf die in der Variablen ξ geschriebene Differentialgleichung (4) und anschließende partielle Integration der Integrale auf der linken Seite ergibt sich die Integralgleichung

$$y(x) + N(x) \int_a^x \frac{A(\xi)}{N(\xi)} y(\xi) d\xi = F(x) \quad \dots \quad (7),$$

mit der freien Funktion

$$F(x) = \sum_{i=1}^n C_i x^{i-1} + \int_a^x \frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!} f(\xi) d\xi \quad \dots \quad (8).$$

Dabei sind die C_i willkürliche Konstanten. Diese Integralgleichung hat die Gestalt (2), so daß nach (3) ihre Lösung

$$y(x) = \sum_{i=1}^n C_i \left\{ x^{i-1} - N(x) \int_a^x \frac{A(\xi)}{N(\xi)} e^{\int_a^\xi A(t) dt} \xi^{i-1} d\xi \right\} + \int_a^x \frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!} f(\xi) d\xi - N(x) \int_a^x \frac{A(\xi)}{N(\xi)} e^{\int_a^\xi A(t) dt} \left\{ \int_a^\xi \frac{(\xi-z)^{n-1}}{(n-1)!} f(z) dz \right\} d\xi \quad \dots \quad (9)$$

lautet. Wegen der linearen Unabhängigkeit der Potenzen von x sind auch die Funktionen

$$y_i(x) = x^{i-1} - N(x) \int_a^x \frac{A(\xi)}{N(\xi)} e^{\int_a^\xi A(t) dt} \xi^{i-1} d\xi$$

linear unabhängig.

Da (9) mit der Integralgleichung (7) auch die Differentialgleichung (4) löst und die C_i völlig freie Parameter sind, haben wir mit (9) die allgemeine Lösung von (4) gefunden.

Literatur

- [1] A. KNESCHKE, Wechselbeziehungen zwischen Differentialgleichungen und Integralgleichungen. (1. u. 2. Mitteilung) Dtsch. Math. 5 (1941) und 6 (1942).
- [2] M. SCHOCH, Überführung gewisser differentieller Randwertaufgaben in lineare Integralgleichungen. Dissertation, Freiberg 1959.
- [3] M. SCHOCH und A. KNESCHKE, Verfahren zur Überführung gewisser differentieller Randwertprobleme in lineare Integralgleichungen. Journ. für die reine und angew. Mathematik (1960).

Anschrift: Dr. M. SCHOCH, Freiberg/Sa., Oststr. 10

Ein Beitrag zur Synthese des Dreistabgetriebes

Von W. SCHÖNE

Das ebene Dreistabgetriebe ist eines der am häufigsten verwendeten Getriebe. Es besteht aus einem Gelenkviereck, von dem eine Seite, der Steg $F_1 F_2$, festgestellt ist. Mit der dem Steg gegenüberliegenden Seite, der Koppel, ist eine Ebene starr verbunden. Ein beliebiger Punkt dieser Ebene beschreibt bei Bewegung des Getriebes eine Koppelkurve (Bild 1). Diese Kurve ist von sechster Ordnung und trizirkular. Sie besitzt drei Doppelpunkte im Endlichen und drei singuläre Brennpunkte, die alle sechs auf einem Kreise liegen. Sie ist durch neun Bestimmungsstücke gegeben. Eine der wichtigsten Aufgaben der Getriebesynthese besteht nun darin, ein erzeugendes Getriebe einer Koppelkurve zu finden, die durch neun Bestimmungsstücke festgelegt ist. Allgemein ist diese Aufgabe nicht gelöst. Doch sind bereits in Sonderfällen Lösungen dieser Aufgabe bekannt. Hier ist vor allem der Name von Prof. W. SCHMID zu erwähnen. Dieser hat in einer Arbeit [1] das Problem gelöst, ein erzeugendes Getriebe einer Koppelkurve zu finden, von der die drei Doppelpunkte und drei beliebige Punkte gegeben sind.

Hier soll die folgende Aufgabe behandelt werden: Von der Koppelkurve eines ebenen Dreistabgetriebes seien fünf beliebige Punkte P, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 und zwei singuläre Brennpunkte F_1, F_2 — also ebenfalls neun Stücke — gegeben. Gesucht ist das erzeugende Getriebe dieser Koppelkurve mit den Steggelenken F_1, F_2 .

Um diese Aufgabe lösen zu können, läßt man zunächst einen von den fünf Punkten weg und betrachtet die ∞^1 -Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}(2F, 4P)$ aller der Koppelkurven, die zwei gegebene feste singuläre Brennpunkte F_1, F_2 besitzen und durch vier gegebene Punkte P, E_1, E_2, E_3 hindurchgehen. Zu jeder Koppelkurve aus \mathfrak{M} gehört ein erzeugendes Getriebe mit den Steggelenken F_1, F_2 . Denkt man sich jetzt alle diese Getriebe in eine solche Stellung gebracht, daß der die Koppelkurve beschreibende Punkt in den Punkt P

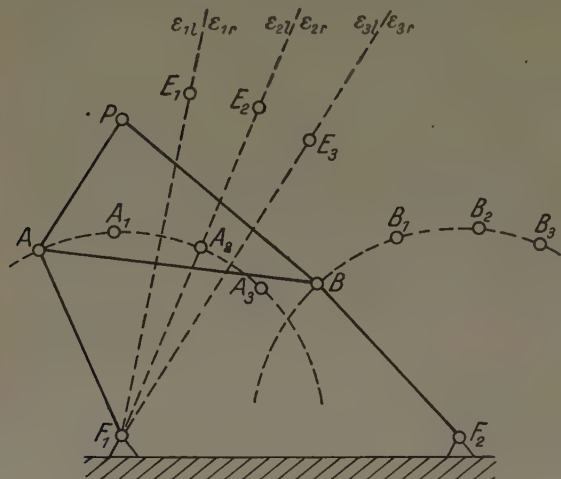


Bild 1

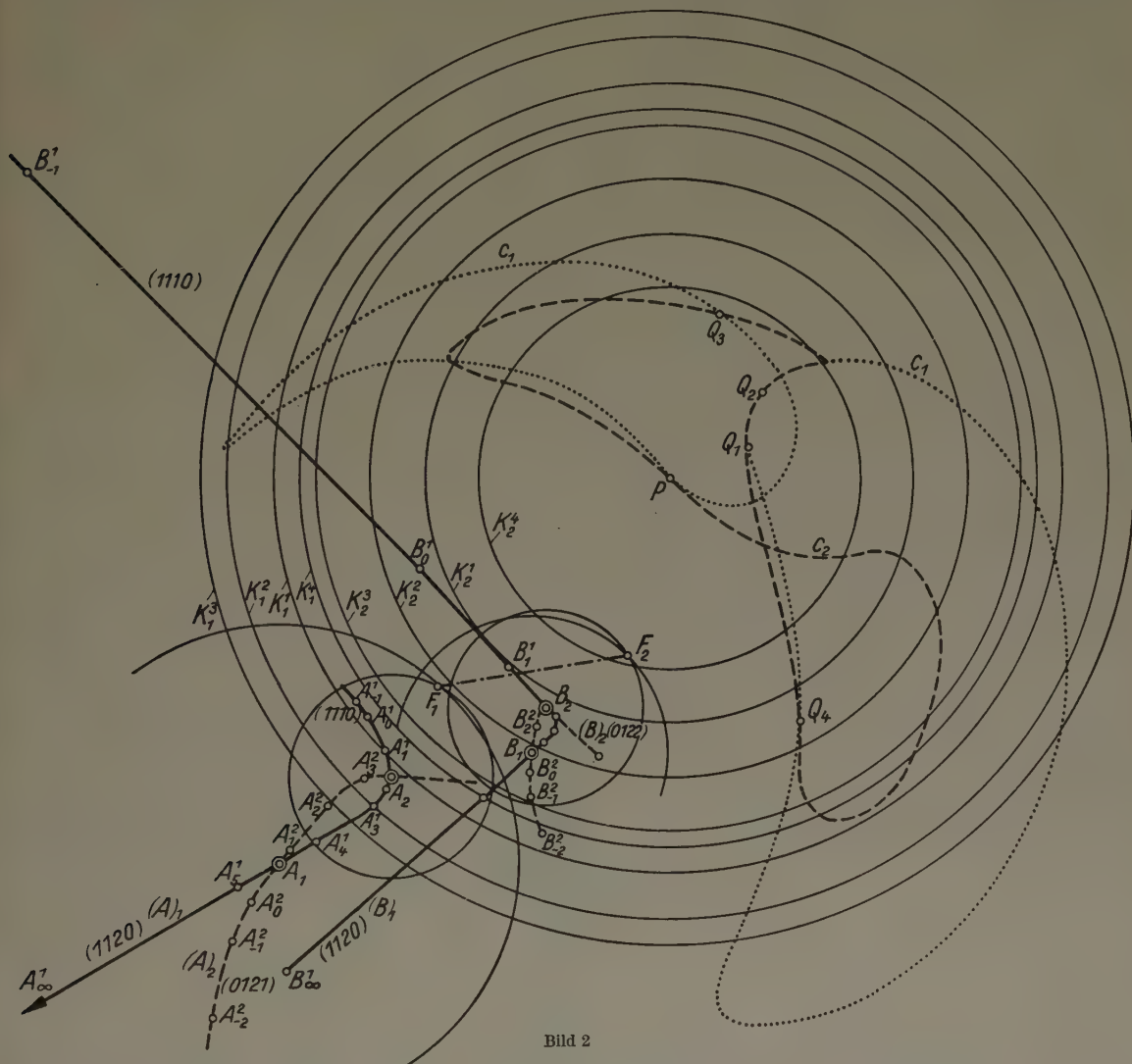
fällt, so erfüllen die Koppelgelenke A, B aller dieser Getriebe stetig zwei Kurven $(A), (B)$. Diese beiden Kurven sollen Gelenkpunktkurven genannt werden. Beide Kurven sind davon abhängig, welchen von den vier gegebenen Punkten man mit P bezeichnet. Die Punkte A, B der Kurven $(A), (B)$ stehen in einer umkehrbar eindeutigen Beziehung. Zwei einander entsprechende Punkte A, B sind Koppelgelenke eines Getriebes $F_1 A B F_2 P$, dessen erzeugender Punkt P eine Koppelkurve von \mathfrak{M} beschreibt. Die Kurven $(A), (B)$ bestehen aus je acht verschiedenen Zweigen, die man durch die acht Symbole $(111), (112), (121), (211), (122), (212), (221), (222)$ kennzeichnen kann.

Zieht man nämlich die orientierten Geraden $F_1 E_\mu$, so wird die Ebene in drei Paare von Halbebenen $\varepsilon_{\mu 1}, \varepsilon_{\mu 2}$ ($\mu = 1, 2, 3$) zerlegt, die man linke bzw. rechte Halbebenen nennen kann. Betrachten wir nun einen Koppelgelenkpunkt A eines erzeugenden Getriebes $F_1 A B F_2 P$ einer Koppelkurve von \mathfrak{M} , so kann derselbe bei der Lage des Koppeldreiecks in Q_μ in der linken oder in der rechten Halbebene liegen (Bild 1). Je nachdem ob das erste oder zweite der Fall ist, steht an der μ -ten Stelle des Klammersymbols $(i_1 i_2 i_3)$ eine 1 oder eine 2. Die Gesamtheit aller Punkte von (A) , die das gleiche Klammersymbol $(i_1 i_2 i_3)$ erhalten, bilden den Zweig $(i_1 i_2 i_3)$. In ähnlicher Weise kann man auch die Punkte von (B) einteilen. Nur sind hier die Geraden $F_1 E_\mu$ durch die Geraden $F_2 E_\mu$ zu ersetzen.

Um nun zu dem gesuchten erzeugenden Getriebe zu kommen, betrachten wir zwei Koppelkurvenmannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}_1(2F, 4P)$ und $\mathfrak{M}_2(2F, 4P)$, die durch die Punkte $P, Q_1, Q_2, Q_3, F_1, F_2$ beziehungsweise $P, Q_2, Q_3, Q_4, F_1, F_2$ bestimmt sind. Die Gelenkpunktkurven dieser zwei Mannigfaltigkeiten seien $(A)_1, (B)_1$ und $(A)_2, (B)_2$. Unter den Schnittpunkten der Kurven $(A)_1$ und $(A)_2$ sowie $(B)_1$ und $(B)_2$ sind nun die gesuchten Koppelgelenkpunkte enthalten. Die richtigen Punktepaare A, B sind dadurch ausgezeichnet, daß sie einander auf beiden Kurvenpaaren $(A)_1, (B)_1$ bzw. $(A)_2, (B)_2$ entsprechen. In Bild 2 ist ein Stück der Gelenkpunktkurven $(A)_1, (B)_1$ und $(A)_2, (B)_2$ gezeichnet, und zwar ist von $(A)_1$ ein Stück der Zweige (1120) und (1110) , von $(A)_2$ ein Teil des Zweiges (0121) zu sehen. Dabei bedeutet die Null an der ersten bzw. letzten Stelle, daß der Punkt Q_1 bzw. Q_4 nicht Grundpunkt der Mannigfaltigkeit \mathfrak{M}_2 bzw. \mathfrak{M}_1 ist. Die Schnittpunkte A_1, A_2 von $(A)_1$ und $(A)_2$ sind beide brauchbare Schnittpunkte, da in beiden Fällen die Klammersym-

bole der sich schneidenden Zweige von $(A)_1$ und $(A)_2$ in den mittleren zwei Ziffern übereinstimmen. Wir erhalten so die zwei Dreistabgetriebe $F_1 A_1 B_1 F_2 P$ mit der Koppelkurve c_1 und $F_1 A_2 B_2 F_2 P$ mit der Koppelkurve c_2 . Man sieht, daß beide Koppelkurven die verlangten Bedingungen erfüllen.

Im folgenden soll eine Anwendung dieser Konstruktion beschrieben werden. Für die Herstellung von Zeichentrickfilmen benutzt man einen Tricktisch, auf dem die aufzunehmenden Zeichnungen liegen, während die Aufnahmekamera senkrecht zur Tischebene bewegt werden kann. Da sich bei Bewegung der Kamera der Abstand Objektiv-Zeichenebene ändert, muß die Kamera in jeder Stellung neu scharf eingestellt werden. Diese Scharfeinstellung soll mit Hilfe eines Dreistab-



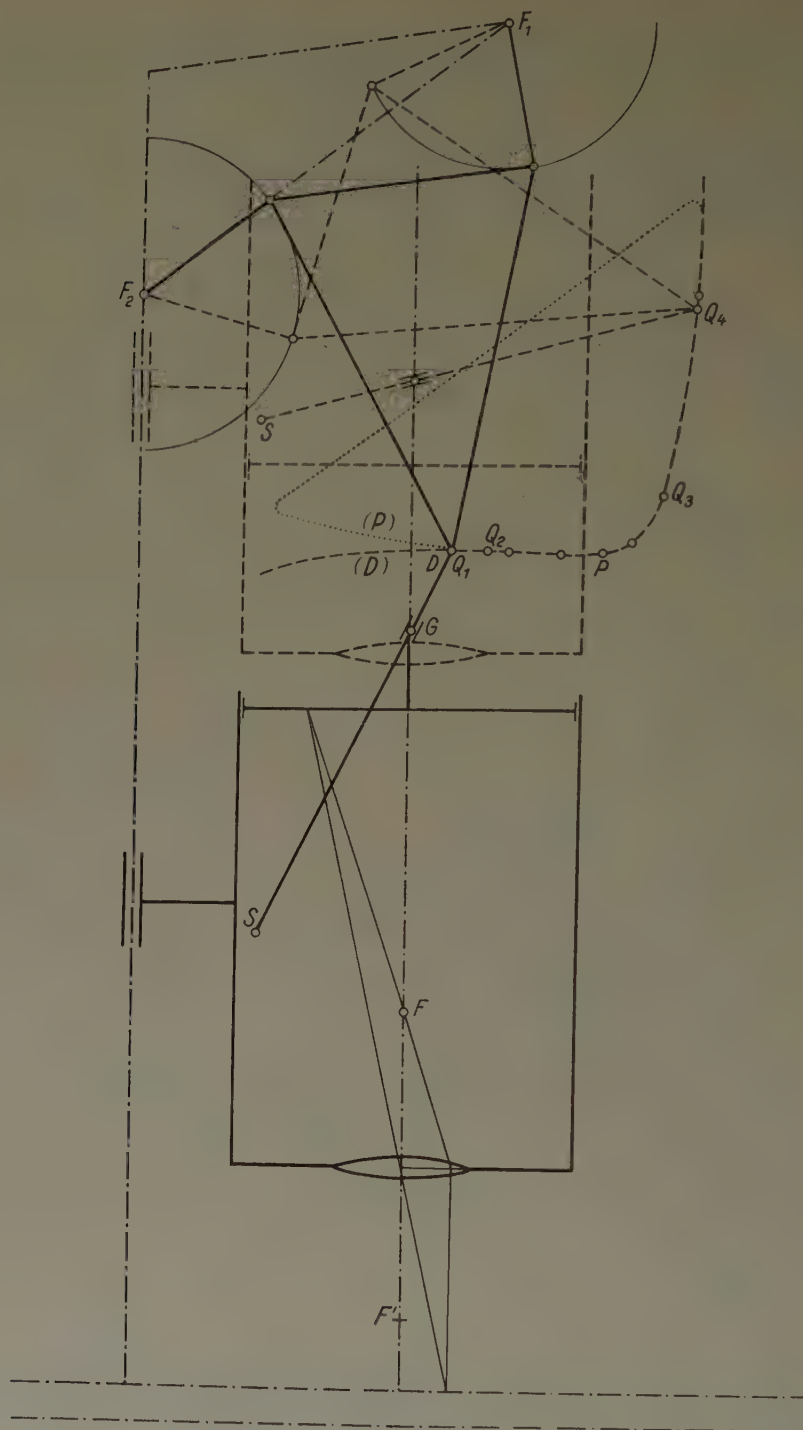


Bild 3

Literatur

- [1] W. SCHMID, Über die Erzeugung einer Koppelkurve aus neun Bestimmungsstücken. Wiss. Zeitschr. d. TH. Dresden 2 (1952/53), Heft 3.
- [2] R. KRAUS, Gelenkviereck für vier Lagen eines Koppelpunkts und gegebene Steggelenke. Getriebelehre, S. 114.
- [3] W. BLASCHKE, H. R. MÜLLER, Ebene Kinematik. München 1956: R. Oldenbourg.
- [4] R. BEYER, Zur Synthese ebener und räumlicher Kurbeltriebe. VDI-Forschungsheft 394.
- [5] W. LICHTENHELDT, Einfache Konstruktionsverfahren zur Ermittlung der Abmessungen von Kurbelgetrieben. VDI-Forschungsheft 408.
- [6] J. VOLMER, Ein Beitrag zur Erzeugung von Koppelkurven. Wissensch. Zeitschr. d. TH. Dresden 6 (1956/57), Heft 3.

Anschrift: Dipl.-Math. W. SCHÖNE, Freiberg (Sa.), Lessingstr. 50

Funktionalanalytische Herleitung von Fehlerabschätzungen und ihre praktische Durchführung auf Rechenanlagen^{*)}

Von JOHANN SCHRÖDER

Die Verwendung programmgesteuerter Rechenanlagen ermöglicht es, immer umfangreichere und schwierigere numerische Probleme zu bearbeiten. Die Zahlenwerte, welche eine Rechenanlage liefert, werden in vielen Fällen mit einem Näherungsverfahren ermittelt worden sein. Sie enthalten dann also den Verfahrensfehler und außerdem Abrundungsfehler. Bei wachsendem Umfang der numerischen Rechnung steigt auch das Bedürfnis nach einer brauchbaren Fehlerabschätzung.

Der erste Teil des unter obigem Titel auf der GAMM-Tagung 1960 gehaltenen Vortrages gab einen Überblick über bestimmte Fehlerabschätzungsmethoden und zeigte die theoretischen Beziehungen zwischen diesen Methoden auf. Im zweiten Teil wurde dann ein systematisches Abschätzungsverfahren für Anfangswertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung mitgeteilt, welches digitale Rechenanlagen benutzt.

Über dies Abschätzungsverfahren soll in Kürze an anderer Stelle berichtet werden. Dieser Aufsatz enthält im wesentlichen den ersten Teil des Vortrages in ergänzter Form. Wir stellen hier eine Klasse verwandter Prinzipien zur Fehlerabschätzung zusammen und vergleichen sie miteinander am einfachen Beispiel einer Randwertaufgabe. Die Prinzipien sind abstrakt formuliert und daher auf verschiedenartige Problemtypen anwendbar. Alle genannten funktionalanalytischen Ergebnisse enthalten auch eine Existenzaussage: es gibt (mindestens) eine Lösung innerhalb der angegebenen Schranken. Z. T. werden in den zitierten Arbeiten auch Eindeutigkeits- und Konvergenzfragen behandelt. Auf diese soll hier jedoch nicht eingegangen werden.

Die Abschätzungen in den Abschnitten 1 und 2 sind besonders für Iterationsverfahren geeignet. Gegenüber diesen Abschätzungen haben die vom Defekt der gegebenen Gleichung ausgehenden Abschätzungen in Abschnitt 3 für unser Beispiel verschiedene Vorteile. Dies (Teil-) Ergebnis des Vergleichs gilt für unser Beispiel, läßt sich aber auf die meisten Differentialgleichungsprobleme übertragen. Im Abschnitt 4 werden dann einige Formeln zusammengestellt, welche man für das oben erwähnte Abschätzungsverfahren bei Anfangswertaufgaben benötigt.

1. Mit Iterationsverfahren zusammenhängende Abschätzungen für Gleichungen $u = Tu$

In den Abschnitten 1 und 2 beschreiben wir Fehlerabschätzungen für Gleichungen der Form $u = Tu$ in einem Raum $\mathfrak{R} = \{u, v, \dots\}$ mit einem Operator T , der \mathfrak{R} in \mathfrak{R} abbildet¹⁾. Diese Abschätzungen hängen mehr oder weniger eng mit Iterationsverfahren zusammen. In diesem Abschnitt 1 werden solche Ergebnisse eingehender besprochen, bei deren Herleitung (jedenfalls z. T.) Iterationsverfahren direkt benutzt werden.

Die Ergebnisse werden am einfachen Beispiel der (reellen) Randwertaufgabe

$$- \ddot{u} - q(t) u = f(t, u), \quad u(0) = u(1) = 0 \quad \left(u = u(t), \quad \dot{} = \frac{d}{dt} \right) \dots \dots (1)$$

erläutert und miteinander verglichen. Dabei sei $q(t)$ stetig und $q(t) < \pi^2$ für $0 \leq t \leq 1$, sowie $f(t, u)$ stetig für $0 \leq t \leq 1, -\infty < u < \infty$ ²⁾. Diese Aufgabe läßt sich im Raum \mathfrak{R} der auf $[0, 1]$ stetigen Funktionen $u(t)$ in der Form $u = Tu$ mit

$$Tu = \int_0^1 G(t, s) f(s, u(s)) ds \dots \dots \dots (2)$$

schreiben. Wegen $q(t) < \pi^2$ gilt dabei für die GREENSCHE Funktion [4]

$$G(t, s) \geq 0 \dots \dots \dots (3).$$

Die Tabelle I gibt eine Übersicht über die verschiedenen Abschätzungsmethoden. Spalte 1 enthält Voraussetzungen über den Raum \mathfrak{R} . — In Spalte 2 wird die allgemeine Art des Operators T charakterisiert. (Die vorkommenden Größen werden dabei z. T. erst in den folgenden Spalten

^{*)} Auf Einladung der Tagungsleitung gehaltener Hauptvortrag.

¹⁾ Daß T auf ganz \mathfrak{R} erklärt sein soll, wird hier nur der Einfachheit halber angenommen.

²⁾ Für das zweite Argument der Funktion f verwenden wir ebenso wie für die Elemente $\in \mathfrak{R}$ den Buchstaben u . Eine Verwechslung ist kaum zu befürchten.

Tabelle I. Abschätzungen für Gleichungen $u = T u$

1	2	3	4	5
Eigenschaften von \mathfrak{R}	Allgemeine Voraussetzungen über T	Iterationsverfahren	Spezielle einschränkende Forderungen	Fehlerabschätzung
1	T wachsend in $\langle x_0, y_0 \rangle$, [FPS]	$x_{n+1} = T x_n, y_{n+1} = T y_n$		
2	T fallend in $\langle x_0, y_0 \rangle$, [FPS]	$x_{n+1} = T y_n, y_{n+1} = T x_n$	$x_0 \leq y_0,$ $x_0 \leq x_1,$ $y_1 \leq y_0$	$x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq \dots$ $\leq u^* \leq$ $\dots \leq y_n \leq \dots \leq y_1 \leq y_0$
3	$H_1[u, u] \leq T u \leq H_2[u, u]$ in $\langle x_0, y_0 \rangle$, $H_1[\xi, \eta] \leq H_2[\xi', \eta']$ für $\xi \leq \xi', \eta \geq \eta'$, [FPS]	$x_{n+1} = H_1[x_n, y_n],$ $y_{n+1} = H_2[y_n, x_n]$		
4	$\delta(T u, T v) \leq P \delta(u, v)$ für alle u mit der Eigenschaft: $u = u_0$ oder $\delta(u, u_1) \leq \frac{P}{1-P} \delta(u_1, u_0)$ und ebensolche v . $P =$ reelle Zahl		$P < 1$	$\delta(u^*, u_1) \leq \frac{P}{1-P} \delta(u_1, u_0)$
5	\mathfrak{R} -metrisch, vollständig (Abstand $\delta(u, v) \in$ halbgeordnetem linearem Raum \mathfrak{R} erklärt)	$u_{n+1} = T u_n$	Es gibt $\sigma \geq 0$ aus \mathfrak{R} mit $\sigma \geq P(\sigma + \sigma_1)$ bei $\delta(u_1, u_0) \leq \sigma_1$	$\delta(u^*, u_1) \leq P(\sigma + \sigma_1) \leq \sigma$
6	halbgeordnet ($u \leq v$ definiert)		Es gibt $\sigma, \sigma \in \mathfrak{R}$ mit $\sigma \leq K_1[\sigma + \sigma_1, \sigma + \sigma_1],$ mit $\sigma \leq K_1[\sigma + \sigma_1, \sigma + \sigma_1],$ $\bar{\sigma} \leq K_2[\sigma + \sigma_1, \sigma + \sigma_1],$ $\sigma \leq \sigma$ bei $\sigma_1 = u_1 - u_0$	$\sigma \leq K_1[\sigma + \sigma_1, \sigma + \sigma_1]$ $\leq u^* - u_1 \leq$ $\leq K_2[\sigma + \sigma_1, \sigma + \sigma_1] \leq \sigma$

Tabelle II. Anwendung der Ergebnisse in Tabelle I auf Beispiel (1)

1	2	3	4	5
Definitionen in \mathfrak{R}	Allgemeine Voraussetzungen über $f(t, u)$	Iterationsverfahren	Spezielle einschränkende Forderungen	Fehlerabschätzung
1	$f(t, u)$ wachsend in u für $x_0 \leq u \leq y_0$	wie in Zeile 3 mit $f_1 = f, f_2 = 0$		
2	$u \leq v$ bedeutet: $u(t) \leq v(t)$ für $0 \leq t \leq 1$	wie in Zeile 3 mit $f_1 \equiv 0, f_2 = f$	$x_0 \leq y_0,$ $x_0 \leq x_1,$ $y_1 \leq y_0$	$x_0 \leq x_1 \leq u^* \leq y_1 \leq y_0$
3	$f(t, u) = f_1(t, u) + f_2(t, u),$ $f_1(t, u)$ wachsend $f_2(t, u)$ fallend in u für $x_0 \leq u \leq y_0$	$- \ddot{x}_1 - q x_1 = f_1(t, x_0) + f_2(t, y_0),$ $- \ddot{y}_1 - q y_1 = f_1(t, y_0) + f_2(t, x_0),$ $x_1(0) = x_1(1) = y_1(0) = y_1(1) = 0$		
4	$ f(t, u) - f(t, v) \leq L(t) u - v $ für alle u mit der Eigenschaft: $u = u_0$ oder $ u - u_1 \leq \frac{P}{1-P} \max_t u_1(t) - u_0(t) $ und ebensolche v		$P < 1$ bei $P = \max_t q(t)$ $-\ddot{\varphi} - q \varphi = L(t),$ $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$	$ u^*(t) - u_1(t) \leq$ $\leq \frac{P}{1-P} \max_t u_1(t) - u_0(t) $
5	$\delta(u, v) =$ $ u(t) - v(t) $ ($\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1$)	$-\ddot{u}_1 - q u_1 = f(t, u_0),$ $u_1(0) = u_1(1) = 0$	Es gibt $\sigma(t) \geq 0$ mit $-\ddot{\sigma} - q \sigma \geq \tilde{f}(t, \sigma + \sigma_1),$ $\sigma(0) = \sigma(1) = 0$ bei $\sigma_1 = u_1 - u_0 $	$ u^*(t) - u_1(t) \leq \sigma(t)$
6	$u \leq v$ bedeutet: $u(t) \leq v(t)$ für $0 \leq t \leq 1$	$-\ddot{g}_{11}(t, z) \leq g(t, z) \leq \{\tilde{g}_{21}(t, z) - \tilde{g}_{12}(t, -z)\}$ für $\begin{cases} z \geq 0 \\ z \leq 0 \end{cases}$ (g aus (12)), $\tilde{g}_{ii}(t, z)$ in z wachsend, $\tilde{g}_{ii}(t, 0) \equiv 0$	Es gibt $\sigma(t), \bar{\sigma}(t)$ mit $-\ddot{\sigma} - q \sigma \leq k_1[\sigma + \sigma_1, \bar{\sigma} + \sigma_1],$ $-\ddot{\bar{\sigma}} - q \bar{\sigma} \leq k_2[\sigma + \sigma_1, \sigma + \sigma_1],$ $\sigma \leq \bar{\sigma}, \sigma(0) = \bar{\sigma}(1) = \bar{\sigma}(0) =$ $= \bar{\sigma}(1) = 0$ bei $\sigma_1 = u_1 - u_0,$ k_1, k_2 wie in Tabelle III, Zeile 4	$\sigma(t) \leq u^*(t) - u_1(t) \leq \bar{\sigma}(t)$

erläutert.) $\langle x, y \rangle$ ist das Intervall $\{u \in \mathfrak{R} : x \leq u \leq y\}$. Die Angabe [FPS] in den Zeilen 1, 2, 3 und 6 bedeutet, daß für den Operator T ein Fixpunktsatz folgender Art gelten soll: *Bildet T ein Intervall $\langle x, y \rangle$ in sich ab, so enthält $\langle x, y \rangle$ einen Fixpunkt $u^* = Tu^*$.* Dieser Fixpunktsatz wird dazu benutzt, die Existenz einer Lösung u^* innerhalb der angegebenen Schranken zu beweisen. Die Voraussetzungen in Spalte 2 sind nicht im Einzelfall, sondern möglichst für bestimmte Problemklassen nachzuprüfen. — Spalte 3 gibt das zugehörige Iterationsverfahren an. — In Spalte 4 stehen weitere Voraussetzungen, die jeweils im konkreten Fall nachzuprüfen sind. Sie bedeuten eine gewisse Beschränkung der „Größe“ von T . — Die letzte Spalte enthält dann die Fehlerabschätzung.

Die Angaben über die Abschätzungen bei (monoton) wachsendem ([5], [7], [3]) oder fallendem [3] Operator in den Zeilen 1 und 2 sind wohl unmittelbar verständlich. T heißt wachsend {fallend}, wenn aus $u \leq v$ die Beziehung $Tu \leq Tv$ { $Tu \geq Tv$ } folgt. Die Voraussetzung [FPS] kann bei wachsendem T wegfallen, wenn jede monotone, beschränkte Folge $\subset \mathfrak{R}$ ein Grenzelement $\in \mathfrak{R}$ besitzt und T stetig ist [5]. Bei fallendem T kann die Voraussetzung [FPS] z. B. fortfallen, falls \mathfrak{R} die eben genannte Eigenschaft und außerdem Tu die Form $Tu = r + Au$ mit festem $r \in \mathfrak{R}$ und stetigem linearem Operator A hat [3]. — In Zeile 4 sind die bekannten Ergebnisse für Iterationsverfahren mit kontrahierendem Operator angegeben [12], [2]. — Zeile 5 enthält verallgemeinerte Abschätzungen in etwa der Form, wie sie in [9] oder als Spezialfall in [10] beschrieben sind³⁾. Jedem Paar $u, v \in \mathfrak{R}$ sei dabei ein Element $\delta(u, v)$ eines halbgeordneten linearen Raumes \mathfrak{R} als verallgemeinerter Abstand zugeordnet, so daß bestimmte Axiome gelten. In Spalte 2 bedeutet P einen $\{\varrho \in \mathfrak{R} : \varrho \geq 0\}$ in \mathfrak{R} abbildenden nicht notwendig linearen Operator⁴⁾. Dabei wird verlangt, daß entweder a) jede monotone, beschränkte Folge $\subset \mathfrak{R}$ konvergiert und P stetig ist oder b) \mathfrak{R} ein halbgeordneter Banachraum und P vollstetig ist. — Die Zeilen 3 und 6 werden in Abschnitt 2 besprochen.

Die Tabelle II bezieht sich auf das Beispiel (1). Spalte 1 gibt eine mögliche Wahl der Definitionen in \mathfrak{R} an⁵⁾. Spalte 2 nennt Voraussetzungen für $f(t, u)$, unter denen T aus (2) die in Spalte 2 der Tabelle I geforderten Eigenschaften hat. Daß die Voraussetzung [FPS] in den betreffenden Zeilen erfüllt ist, beweist man mit dem SCHAUDERSchen Fixpunktsatz [8]. $L(t)$ und $\tilde{f}(t, z)$ sind für die vorkommenden Argumente stetige Funktionen. — In Spalte 3 sind nur die Beziehungen zwischen den nullten und ersten Näherungen genannt. Die Angaben in den weiteren Spalten sind sicher unmittelbar verständlich.

Vergleichen wir nun die bisher besprochenen Fehlerabschätzungen für unser Beispiel bezüglich ihrer Genauigkeit und ihres Anwendungsbereiches. Dabei sei der Einfachheit halber angenommen, daß $\frac{\partial f}{\partial u}(t, u) = f'(t, u)$ existiert und stetig ist⁶⁾. In Zeile 1 und 2 soll $f(t, u)$ in u wachsen bzw. fallen, d. h. $f' \geq 0$ bzw. $f' \leq 0$ sein; als Schranken für die Lösung dienen die Näherungen selbst. Solche Vorzeichenbeschränkungen braucht man in den Zeilen 4 und 5 nicht, dafür wird dort das Vorzeichen von $f'(t, u)$ bei der Fehlerabschätzung aber auch nicht berücksichtigt. In Zeile 4 wird eine LIPSCHITZbedingung bezüglich u vorausgesetzt, d. h. $|f'(t, u)|$ in einem bestimmten Gebiet durch eine allein von t abhängende Funktion $L(t)$ abgeschätzt. Die Forderung in Zeile 5 kann man (bei existierenden Ableitungen) auch in der Form schreiben⁶⁾:

$$|f'(t, u)| \leq \tilde{f}'(t, |u - u_0|), \quad \tilde{f}'(t, 0) \equiv 0, \quad \tilde{f}'(t, z) \text{ in } z \text{ wachsend.}$$

Man berücksichtigt in Zeile 5 das Verhalten von $|f'(t, u)|$ also besser. Das macht sich z. B. besonders beim vereinfachten NEWTONschen Verfahren bemerkbar, für welches $f'(t, u_0) \equiv 0$ ist.

2. Mit Fixpunktsätzen gewonnene Fehlerabschätzungen für Gleichungen $u = Tu$

Mit Hilfe allgemeiner topologischer Fixpunktsätze (Voraussetzung [FPS]) lassen sich Ergebnisse gewinnen, welche auf unser Beispiel angewendet — alle in den Zeilen 1, 2, 4 und 5 aufgeführten Fehlerabschätzungen in verallgemeinerter und verbesserter Form enthalten [11]. Die abstrakten Ergebnisse findet man in den Zeilen 3 und 6 der Tabelle I, Anwendungsbeispiele für die Aufgabe (1) in den entsprechenden Zeilen der Tabelle II. Die Voraussetzung [FPS] tritt

³⁾ Der theoretischen Idee nach findet man Ähnliches auch bei KANTOROVITCH [5].

⁴⁾ Die Voraussetzung, daß die angegebene Abschätzung in Spalte 2 für $\delta(u, u_1) \leq \sigma$ und entsprechende v gelten soll, bedeutet eine Koppelung der Angaben in den Spalten 2 und 4. Diese Koppelung entfällt, wenn man die Ungleichung in Spalte 2 für alle u und v (ohne Vergrößerung von P) beweisen kann. Das läßt sich auch bei nichtlinearem Operator T oft erreichen, wenn man eine nichtlineare „Majorante“ P benutzt.

⁵⁾ Die Ergebnisse in Zeile 4 lassen sich oft verbessern, wenn man als Abstand $\delta(u, v) = \max \frac{|u(t) - v(t)|}{W(t)}$ mit einer geeigneten Gewichtsfunktion $W(t)$ wählt. Siehe etwa [2].

⁶⁾ Die Ableitung nach dem zweiten Argument kennzeichnen wir durch einen Strich.

zwar auch in den Zeilen 1 und 2 der Tabelle I auf, kann dort aber (wie oben erwähnt) in vielen Fällen durch andere Bedingungen ersetzt werden. Während die Arbeiten über die Ergebnisse in den Zeilen 1, 2, 4 und 5 auch die Konvergenz der betreffenden Iterationsverfahren untersuchen und z. T. ferner Eindeutigkeitsaussagen enthalten, bekommt man mit der Voraussetzung [FPS] lediglich Existenzaussagen und Fehlerabschätzungen.

Die $H_i[\xi, \eta]$ und $K_i[\alpha, \beta]$ in den Zeilen 3 und 6 der Tabelle I bedeuten für $\xi, \eta \in \mathfrak{R}$ bzw. $\alpha, \beta \in \mathfrak{R}$ erklärte Funktionen mit Werten aus \mathfrak{R} . Die dortigen Einschließungsvoraussetzungen für Tu bzw. $T(u_0 + z) - Tu_0$ sind äquivalent, sie gehen ineinander über, wenn man

$$H_i[\xi, \eta] = K_i[\alpha, \beta] + Tu_0 \quad (i = 1, 2) \quad (4)$$

mit

$$\xi = \alpha + u_0, \quad \eta = \beta + u_0 \quad (5)$$

setzt. Überhaupt stellen die Angaben der Zeilen 3 und 6 (Tabelle I) im wesentlichen nur verschiedene Formulierungen der gleichen Aussage dar⁷⁾.

Speziell kann

$$H_1[\xi, \eta] = H_2[\xi, \eta] \quad \text{und} \quad K_1[\alpha, \beta] = K_2[\alpha, \beta] \quad (6)$$

sein. Ist T z. B. die Summe

$$T = T_1 + T_2 \quad (7)$$

eines wachsenden Operators T_1 und eines fallenden Operators T_2 , so kann man

$$H_1[\xi, \eta] = H_2[\xi, \eta] = T_1 \xi + T_2 \eta \quad (8a)$$

und

$$K_1[\alpha, \beta] = K_2[\alpha, \beta] = T_1(u_0 + \alpha) - T_1 u_0 + T_2(u_0 + \beta) - T_2 u_0 \quad (8b)$$

setzen^{8) 9)}. Die Abschätzungen der Zeilen 1 und 2 sind somit Spezialfälle der Ergebnisse von Zeile 3, bei denen (8a) verwendet wird und $T_1 \xi + T_2 \eta$ von ξ bzw. η nicht abhängt.

Die Wahl (6) oder gar (8) führt jedoch im allgemeinen Fall nicht notwendig zu den besten Ergebnissen; wie wir an unserem Beispiel unten zeigen.

Bei dem Beispiel haben die H_i und K_i aus Tabelle I folgende Gestalt

$$H_i[\xi, \eta](t) = \int_0^1 G(t, s) h_i[\xi, \eta](s) ds \quad (i = 1, 2) \quad (9a),$$

$$K_i[\alpha, \beta](t) = \int_0^1 G(t, s) k_i[\alpha, \beta](s) ds \quad (i = 1, 2) \quad (9b).$$

Dabei sind die h_i und k_i entsprechend (4) durch

$$h_i[\xi, \eta](t) = k_i[\alpha, \beta](t) + f(t, u_0) \quad (i = 1, 2) \quad (10)$$

verknüpft.

In den vier Zeilen der Tabelle III sind vier verschiedene Möglichkeiten der Wahl der k_i angegeben. Dabei werden folgende Bezeichnungen benutzt:

$$u^+(t) = \frac{1}{2}(|u(t)| + u(t)), \quad u^-(t) = \frac{1}{2}(|u(t)| - u(t)) \quad (11),$$

$$\left. \begin{aligned} g(z) &= g(t, z) = f(t, u_0 + z) - f(t, u_0), \\ g_i(z) &= g_i(t, z) = f_i(t, u_0 + z) - f_i(t, u_0) \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2) \quad (12).$$

Wir untersuchen zunächst, für welche $k_i^{(j)}$ ($j = 1, 2, 3$ oder 4) man nach Zeile 6 der Tabelle I die genauesten Fehlerabschätzungen erhält. Da dies an anderer Stelle noch nicht geschehen ist, halten wir die Darstellung hier etwas ausführlicher.

⁷⁾ Die Einschließungsvoraussetzung für $T(u_0 + z) - Tu_0$ wird in Zeile 6 für alle z gefordert. Das ist nicht notwendig, jedoch (ohne Genauigkeitsverlust) praktisch immer zu erreichen (falls T auf \mathfrak{R} definiert ist).

⁸⁾ Für den Fall (7) berichtete KOLODNER in [6] unter komplizierteren Voraussetzungen über ein Iterationsverfahren für eine Folge $\{x_n\}$, wie mir erst jetzt bekannt wird.

⁹⁾ Konvergiert in \mathfrak{R} jede monotone beschränkte Folge und haben die T_i die Gestalt $T_i u = r_i + A_i u$ mit $r_i \in \mathfrak{R}$ und linearen stetigen Operatoren A_i , so kann man im Fall (8a) auf die Voraussetzung [FPS] verzichten. (Beweis entsprechend wie bei fallendem Operator in [3].)

Tabelle III. Funktionen $k_i[x, \beta]$

j	Voraussetzung	$k_1^{(j)}[x, \beta]$	$k_2^{(j)}[x, \beta]$
1	$f(t, u) = f_1(t, u) + f_2(t, u)$, $f_1(t, u)$ wachsend in u , $f_2(t, u)$ fallend in u ,	$g_1(t, \alpha) + g_2(t, \beta)$	
2	d. h. (siehe (12)): $g(t, z) = g_1(t, z) + g_2(t, z)$, $g_1(t, z)$ wachsend in z , $g_2(t, z)$ fallend in z	$\min [g_2(t, \beta^+), g_1(t, -\alpha^-)] + \max [g_1(t, \alpha^+), g_2(t, -\beta^-)]$	
3		$\min [g_2(t, \beta^+), g_1(t, -\alpha^-)]$	$\max [g_1(t, \alpha^+), g_2(t, -\beta^-)]$
4	$\left. \begin{array}{l} -\tilde{g}_{11}(t, z) \\ -\tilde{g}_{12}(t, -z) \end{array} \right\} \leq g(t, z) \leq \left\{ \begin{array}{l} \tilde{g}_{21}(t, z) \\ \tilde{g}_{22}(t, -z) \end{array} \right.$ für $\begin{cases} z \geq 0 \\ z \leq 0 \end{cases}$, $g_{i1}(t, z)$ wachsend in z , $\tilde{g}_{i1}(t, 0) \equiv 0$	$-\max [\tilde{g}_{11}(t, \beta^+), \tilde{g}_{12}(t, \alpha^-)]$	$\max [\tilde{g}_{21}(t, \alpha^+), \tilde{g}_{22}(t, \beta^-)]$

Zeile 6 der Tabelle I enthält die Fehlerabschätzungen

$$K_1[v, w] \leq u^* - u_1 \leq K_2[w, v]$$

und

$$v \leq u^* - u_0 \leq w \quad \dots \dots \dots (13)$$

für $v \leq w$ mit $v = \underline{\sigma} + \sigma_1$, $w = \bar{\sigma} + \sigma_1$. Wegen (13) ist $v \geq 0$ oder $w \leq 0$ nur in Sonderfällen möglich, im allgemeinen wird man sogar einen Ansatz für $\underline{\sigma}$ und $\bar{\sigma}$ machen, bei dem $v \leq 0$ und $w \geq 0$ ausfällt.

Nach Zeile 6 der Tabelle I sollte also für $v \leq w$ und insbesondere für $v \leq 0$, $w \geq 0$ der Wert $K_1[v, w]$ möglichst groß und $K_2[w, v]$ möglichst klein ausfallen. Bei unserem Beispiel hat man dann wegen (3) entsprechende Forderungen für $k_1[v, w](t)$ und $k_2[w, v](t)$.

Tabelle IV

Vergleich der $k_1^{(j)}[v, w]$ und $k_2^{(j)}[w, v]$ (t fest, Abkürzungen: $g_1(w) = g_1(t, w) \dots, k_1^{(4)}$ mit optimalen \tilde{g}_{i1} gebildet)

	$w(t) \leq 0$	$w(t) \geq 0$
$v(t) \geq 0$	—	$k_2^{(1)}[v, w] = k_1^{(2)}[v, w] = g_1(v) + g_2(w)$ $\geq g_2(w) = k_1^{(3)}[v, w] \leq k_1^{(4)}[v, w]$
		$k_2^{(1)}[w, v] = k_2^{(2)}[w, v] = g_1(w) + g_2(v)$ $\leq g_1(w) = k_2^{(3)}[w, v] \geq k_2^{(4)}[w, v]$
	$k_1^{(1)}[v, w] = k_1^{(2)}[v, w] = g_1(v) + g_2(w)$ $\geq g_1(v) = k_1^{(3)}[v, w] \leq k_1^{(4)}[v, w]$	$k_1^{(1)}[v, w] = g_1(v) + g_2(w)$ $\leq \min [g_1(v), g_2(w)] = k_1^{(2)}[v, w]$ $= k_1^{(3)}[v, w] \leq k_1^{(4)}[v, w]$
$v(t) \leq 0$	$k_2^{(1)}[w, v] = k_2^{(2)}[w, v] = g_1(w) + g_2(v)$ $\leq g_2(v) = k_2^{(3)}[w, v] \geq k_2^{(4)}[w, v]$	$k_2^{(1)}[w, v] = g_1(w) + g_2(v)$ $\geq \max [g_1(w), g_2(v)] = k_2^{(2)}[w, v]$ $= k_2^{(3)}[w, v] \geq k_2^{(4)}[w, v]$

Tabelle IV gibt einen Überblick über die Größe der $k_1^{(j)}[v, w]$ und $k_2^{(j)}[w, v]$. Daraus können wir nun also Folgerungen über die Güte der Fehlerschranken ziehen. Die Wahl der $k_1^{(1)}$ in Zeile 1 der Tabelle III entspricht der Aufspaltung (8 b). Allgemein erhält man mit den $k_1^{(2)}$ keine schlechteren Ergebnisse als mit den $k_1^{(1)}$. Ist jedoch wenigstens für gewisse $t: v(t) \leq 0$, $w(t) \geq 0$, so können die $k_1^{(2)}$ genauere Schranken liefern.

Ohne nähere Erläuterung sei erwähnt, daß man mit den $k_i^{(2)}$ im allgemeinen wirklich bessere Abschätzungen erhält, wenn $g'(t, 0) \equiv 0$, und $g''(t, 0) \neq 0$, also $f'(t, u_0) \equiv 0$ und $f''(t, u_0) \neq 0$ ist (die Existenz der Ableitungen⁶⁾ vorausgesetzt). Die Bedingung $f'(t, u_0) \equiv 0$ charakterisiert das vereinfachte NEWTONsche Verfahren. Ist z. B. $g(t, z) = z^2$, so wird

$$g_1(t, z) = \begin{cases} 0 \\ z^2 \end{cases}, \quad g_2(t, z) = \begin{cases} z^2 \\ 0 \end{cases} \quad \text{für } \begin{cases} z \leq 0 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

und somit etwa für $-v = w \geq 0$

$$k_1^{(1)}[v, w] = 0 = k_1^{(2)}[v, w], \quad k_2^{(1)}[w, v] = 2w^2 = 2k_2^{(2)}[w, v].$$

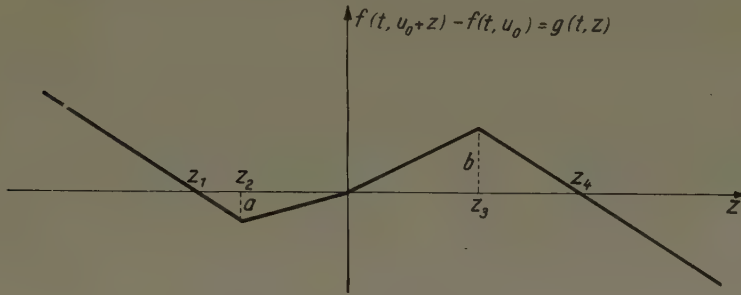


Bild 1. $g(t, z)$ bei festem t (Beispiel)

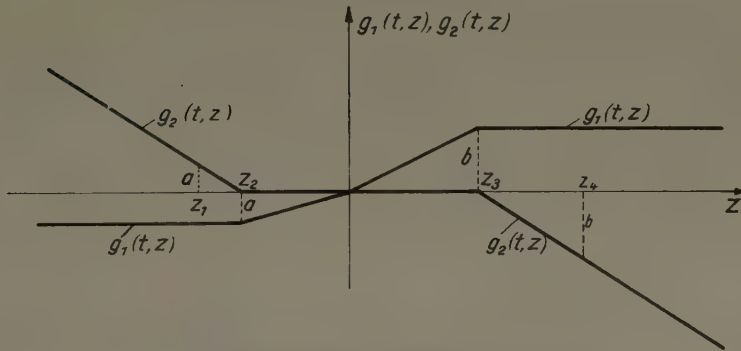


Bild 2. $g_1(t, z)$ und $g_2(t, z)$ bei festem t (zu Bild 1)

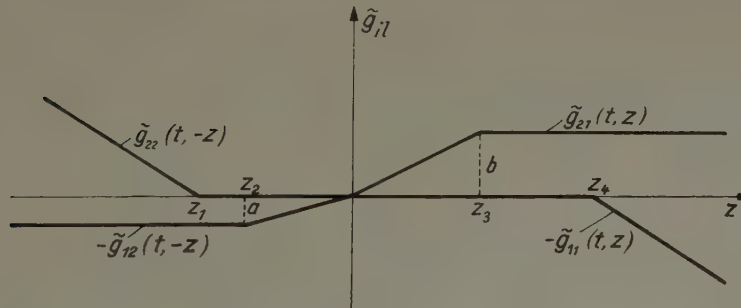


Bild 3. Optimale \tilde{g}_{il} bei festem t (zu Bild 1)

In Zeile 4 der Tabelle III wird eine andersartige Voraussetzung gemacht als in den übrigen Zeilen. Die $\tilde{g}_{il}(t, z)$ sind für $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq z < \infty$ stetige Funktionen mit den angegebenen Eigenschaften. Läßt sich f wie in den Zeilen 1 bis 3 aufspalten, so ist die Voraussetzung der Zeile 4 z. B. erfüllt mit

$$\left. \begin{aligned} \tilde{g}_{11}(t, z) &= -g_2(t, z), & \tilde{g}_{21}(t, z) &= g_1(t, z) \\ \tilde{g}_{12}(t, z) &= -g_1(t, -z), & \tilde{g}_{22}(t, z) &= g_2(t, -z) \end{aligned} \right\} \quad (\text{für } z \geq 0) \quad (14).$$

Setzt man diese Funktionen (14) in die $k_i^{(4)}$ der Zeile 4 ein, so erhält man die $k_i^{(3)}$ in Zeile 3. Dieser Spezialfall in Zeile 3 wird hier nur aufgeführt, um die $k_i^{(4)}$ mit den $k_i^{(2)}$ vergleichen zu können.

Nach Tabelle IV können die $k_i^{(3)}$ schlechtere Ergebnisse liefern als die $k_i^{(2)}$, aber nur, wenn nicht der „Normalfall“ $v \leq 0$, $w \geq 0$ vorliegt. In diesem Fall bekommt man dieselben Schranken. Nun stellt aber (14) nicht die optimale Wahl der $\tilde{g}_{il}(t, z)$ dar. Das möge man etwa den Bildern 1 bis 3 entnehmen. Die $\tilde{g}_{il}(t, z)$ des Bildes 3 sind kleiner als die durch (14) definierten und in

Bild 2 veranschaulichten. Für den Fall $v \leq 0, w \geq 0$ erhält man also mit den $k_i^{(4)}$ bei optimaler Wahl der $\tilde{g}_{il}(t, z)$ die genauesten Fehlerschranken. Daher ist dies Ergebnis in Zeile 6 der Tabelle II aufgenommen.

Nun haben die $k_i^{(4)}$ im allgemeinen eine etwas komplizierte Form. Man kann sie erheblich vereinfachen, indem man für gewisse $\tilde{g}_{il}(t, z)$ dieselben Funktionen verwendet. Wählt man sogar

$$\tilde{g}_{il}(t, z) = \tilde{f}(t, z) \quad \text{für } i, l = 1, 2, \dots \quad (15)$$

so geht die Einschließungsvoraussetzung in Zeile 6, Tabelle II über in die Voraussetzung

$$|f(t, u_0 + z) - f(t, u_0)| \leq \tilde{f}(t, |z|) \quad (\text{d. h. } |f(t, u) - f(t, u_0)| \leq \tilde{f}(t, |u - u_0|)),$$

$$\tilde{f}(t, z) \text{ in } z \text{ wachsend,} \quad \tilde{f}(t, 0) \equiv 0.$$

Das ist eine schwächere Forderung als die in Zeile 5 der Tabelle II genannte Bedingung. In Zeile 5 ist $|f(t, u) - f(t, v)|$ abzuschätzen, hier nur $|f(t, u) - f(t, u_0)|$. Außerdem wird hier nicht wie in Zeile 5 verlangt, daß die Differenz $\tilde{f}(t, z + \hat{z}) - \tilde{f}(t, \hat{z})$ auch in \hat{z} wächst. Damit ist es möglich, den Verlauf von $|g(t, z)| = |f(t, u_0 + z) - f(t, u_0)|$ als Funktion von z auch dann genauer zu erfassen, wenn $|g(t, z)|$ konvex gekrümmt ist. Insbesondere kann man auch Funktionen mit

vertikaler Tangente wie $f(t, u) = \begin{cases} 0 & \text{für } u \leq 0 \\ \sqrt{u} & \text{für } u \geq 0 \end{cases}$ behandeln. Für den Spezialfall (15) nehmen bei

der Wahl $-\sigma = \bar{\sigma} = \sigma$ auch die Fehlerabschätzungen der Zeile 6 die in Zeile 5 genannte Form an. Zeile 6 enthält die Ergebnisse von Zeile 5 also in verbesserter Form.

Den verschiedenen Funktionen $k_i^{(j)}$ ($j = 1, 2, 3, 4$) in Tabelle III entsprechen nach (10), (9) auch verschiedene $h_i^{(j)}$ und $H_i^{(j)}$. Ein Vergleich der mit diesen $H_i^{(j)}$ nach Tabelle I, Zeile 3 für unser Beispiel zu erzielenden Ergebnisse fällt analog dem obigen Vergleich der Ergebnisse mit den verschiedenen $k_i^{(j)}$ aus. Für u_0 in (10) (5) wähle man dabei eine geeignete Näherung, etwa $u_0 = \frac{x_0 + y_0}{2}$. Den obigen Größen v, w entsprechen dann

$$v = x_0 - u_0 = -\frac{y_0 - x_0}{2}, \quad w = y_0 - u_0 = \frac{y_0 - x_0}{2},$$

so daß der Fall $v \leq 0, w \geq 0$ vorliegt.

Der Wahl $k_1 = k_2 = g_1(t, \alpha) + g_2(t, \alpha)$ (Tabelle III, Zeile 1) entspricht die Wahl $h_1 = h_2 = f_1(t, \xi) + f_2(t, \eta)$, also die Aufspaltung (8a), bei der u_0 gar nicht vorkommt. Hierfür ist die Iterationsvorschrift besonders einfach zu formulieren. Daher wurde das entsprechende Ergebnis in Zeile 3 der Tabelle II aufgenommen.

Damit sind alle in Tabelle I aufgeführten Abschätzungen für den Fall unseres Beispiels miteinander verglichen. Auf den jeweils erforderlichen Rechenaufwand (welcher auch von Fall zu Fall verschieden sein wird) sind wir dabei nicht eingegangen. Jedoch erscheint es auch vom praktischen Standpunkt aus nützlich, die theoretischen Beziehungen zwischen den verschiedenen Ergebnissen aufzuzeigen.

3. Vom Defekt ausgehende Abschätzungen für Gleichungen $Au = Bu$

Bei den bisher beschriebenen Fehlerabschätzungen benötigt man Paare oder jedenfalls ein Paar von Elementen, welche in bestimmter Weise miteinander verknüpft sind, bei unserem Beispiel durch Randwertaufgaben. In vielen Fällen erzielt man mit den genannten Methoden gute Ergebnisse. Manchmal ist es jedoch nicht ganz einfach, solche Elementepaare zu finden. Insbesondere erscheint es aber schwierig, von diesen abstrakten Prinzipien ausgehend, systematische Abschätzungsverfahren für bestimmte Problemtypen zu entwickeln, da die Form der speziellen Aufgabe bei der Berechnung der Elementepaare — und damit der Fehlerabschätzung überhaupt — eine entscheidende Rolle spielt. Im folgenden wird nun ein Ergebnis [11] beschrieben, für welches nur eine (auf irgendeine Art berechnete) Näherung benötigt wird, welches den oben beschriebenen Nachteil also nicht besitzt.

Wir behandeln jetzt Gleichungen der allgemeineren Form

$$Au = Bu \quad \dots \quad (17)$$

mit Operatoren A und B , die aus einem halbgeordneten linearen Raum \mathfrak{R} in einen ebensolchen Raum \mathfrak{S} abbilden, genauer:

$$A \mathfrak{D} \subset \mathfrak{S} \text{ mit } \mathfrak{D} \subset \mathfrak{R}, \quad B \mathfrak{R} \subset \mathfrak{S}.$$

Ein Ergebnis für dies Problem ist in Zeile 1 der Tabelle V zusammengefaßt [11]. Die Voraussetzung, daß A linear sein soll, dient dabei nur zur Vereinfachung der Darstellung. A heißt von monotoner Art, wenn aus $A u \leq A v$ die Beziehung $u \leq v$ folgt [1]. Daraus ergibt sich dann die Existenz von A^{-1} . Wiederum der Einfachheit halber sei hier angenommen, daß $T = A^{-1}B$ auf ganz \mathfrak{R} definiert ist¹⁰⁾. Die Voraussetzung [FPS] bezieht sich jetzt auf diesen Operator T . Die $K_i[\alpha, \beta]$ sind hier für $\alpha, \beta \in \mathfrak{R}$ definierte Funktionen mit Werten aus \mathfrak{S} .

Für das Beispiel (1) definieren wir \mathfrak{R} wie bisher, $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}$,

$$A u = -\ddot{u} - q(t) u \quad \text{auf} \quad \mathfrak{D} = \{u \in \mathfrak{R}: \ddot{u} \text{ stetig}, u(0) = u(1) = 0\}, \dots (18)$$

$$B u = f(t, u) \dots (19)$$

A ist wegen (3) von monotoner Art. $T = A^{-1}B$ ist dann durch (2) gegeben.

Aus Zeile 1 der Tabelle V folgende Ergebnisse für dies Beispiel stehen in Zeile 2 derselben Tabelle. Die allgemeinen Voraussetzungen und die daraus abgeleiteten k_i sind dieselben wie in Zeile 6 der Tabelle II. (Die K_i in Zeile 1 der Tabelle V sind für unser Beispiel jetzt aber nicht durch (9b) gegeben, sondern es gilt $K_i = k_i$.) Eine Näherung u_1 braucht man hier nicht zu ermitteln. Statt der Differenz $u_1 - u_0$ geht der Defekt $d[u_0]$ in die speziellen Forderungen ein. Natürlich erhält man dann auch nur eine Abschätzung für $u^* - u_0$.

Die Abschätzung nach Tabelle V kann man daher bezüglich ihrer Genauigkeit auch nur mit den Abschätzungen der Tabelle II vergleichen, welche lediglich nullte Näherungen enthalten, also etwa (13). In diesem Sinne kommt das Resultat in Tabelle V, Zeile 2 dem in Tabelle II, Zeile 6 an Genauigkeit gleich.

Tabelle V. Vom Defekt ausgehende Abschätzungen

	Allgemeine Voraussetzungen	spezielle einschränkende Forderungen	Fehlerabschätzung
1 Abstraktes Ergebnis	A linear und von monotoner Art, $K_1[z, z] \leq B(u_0 + z) - B u_0 \leq K_2[z, z]$, $K_i[\alpha, \beta] \leq K_i[\alpha', \beta']$ für $\alpha \leq \alpha', \beta \geq \beta'$ [FPS] für $T = A^{-1}B$	Es gibt $v, w \in \mathfrak{D}$ mit: $v \leq w$, $A v - K_1[v, w] \leq d[u_0] \leq A w - K_2[w, v]$ bei $d[u_0] = -A u_0 + B u_0$	$v \leq u^* - u_0 \leq w$
2 Ergebnis für das Beispiel (1)	$\left. \begin{aligned} -\tilde{g}_{11}(t, z) \\ -\tilde{g}_{12}(t, -z) \end{aligned} \right\} \leq g(t, z) \leq \left. \begin{aligned} \tilde{g}_{21}(t, z) \\ \tilde{g}_{22}(t, -z) \end{aligned} \right\}$ für $\begin{cases} z \geq 0 \\ z \leq 0, \end{cases}$ (g aus (12)) $\tilde{g}_{i1}(t, z)$ in z wachsend, $g_{i1}(t, 0) \equiv 0$	Es gibt $v(t), w(t) \in \mathfrak{D}$ mit: $v \leq w$, $-\ddot{v} - q v - k_1[v, w] \leq d[u_0] \leq$ $\leq -\ddot{w} - q w - k_2[w, v]$, $v(0) = v(1) = w(0) = w(1) = 0$, $d[u_0] = \ddot{u}_0 + q u_0 + f(t, u_0)$, k_1, k_2 wie in Tabelle III, Zeile 4	$v \leq u^* - u_0 \leq w$
3 Spezialfall der Zeile 2	$ f(t, u_0 + z) - f(t, u_0) \leq \tilde{f}(t, z)$, $\tilde{f}(t, z)$ in z wachsend, $\tilde{f}(t, 0) \equiv 0$	Es gibt $w(t) \geq 0$ mit: $ d[u_0] \leq -\ddot{w} - q w - \tilde{f}(t, w)$, $w(0) = w(1) = 0$	$ u^* - u_0 \leq w$

Die einfacheren Abschätzungen in Zeile 3 der Tabelle V gehen aus denen in Zeile 2 hervor, indem man (15) verwendet und $-v = w \geq 0$ setzt. Dabei liegt dann also der Fall vor, daß für die vorkommenden Argumente v und w der $k_i[\alpha, \beta]$ $v \leq 0$ und $w \geq 0$ gilt. In diesem Fall liefern die in Tabelle III genannten $k_i^{(4)}$ die besten Ergebnisse.

Bei dem bisherigen Vergleich der verschiedenen Ergebnisse benutzten wir immer denselben Operator T aus (2), der die Form $T = A^{-1}B$ hat, wenn man von den Definitionen (18), (19) ausgeht. Die Wahl von A und B und damit $T = A^{-1}B$ ist durch die Aufgabenstellung (1) jedoch nicht zwingend vorgeschrieben. Z. B. kann man $q(t)$ in (18) durch eine andere Funktion ersetzen und muß dann nur auch die Definition von Bu in (19) entsprechend ändern. Damit ergeben sich Möglichkeiten, die Fehlerschranken zu verbessern. Diese Möglichkeiten kann man nun bei den vom Defekt ausgehenden Fehlerabschätzungen viel mehr ausnutzen, denn Au darf dabei auch kompliziertere Gestalt haben, während bei allen anderen hier beschriebenen Abschätzungsverfahren Au im allgemeinen möglichst einfach sein sollte.

Zur Erläuterung behandeln wir das (reelle) Randwertproblem

$$-\ddot{u} = F(t, u), \quad u(0) = u(1) = 0,$$

¹⁰⁾ Bei Randwertaufgaben für partielle Differentialgleichungen z. B. benötigt man etwas andere Voraussetzungen. Siehe dazu [11].

wobei $F(t, u)$ etwa für $0 \leq t \leq 1$, $-\infty < u < \infty$ stetig differenzierbar sei. Diese Aufgabe läßt sich in der Form (1) schreiben mit⁶⁾

$$\begin{aligned} q(t) &= -[F'(t, u_0)]^-, \\ f(t, u) &= F(t, u) - q(t)u, \end{aligned} \quad (20)$$

wobei $[F']^-$ entsprechend (11) definiert ist und u_0 eine Näherungslösung bedeutet (\dot{u}_0 stetig, $u_0(0) = u_0(1) = 0$). Wegen $q(t) \leq 0$ ist der damit nach (18) gebildete Operator A sicher von monotoner Art [1].

Für die Funktion (20) ermitteln wir eine Majorante $\tilde{f}(t, z)$, wie sie in Zeile 3 der Tabelle V benötigt wird. Es gilt

$$f(t, u_0 + z) - f(t, u_0) = F(t, u_0 + z) - F(t, u_0) - F'(t, u_0)z + [F'(t, u_0)]^+ z.$$

Sei nun $\tilde{F}(t, z)$ eine für $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq z < \infty$ stetige, in z wachsende Funktion mit

$$|F(t, u_0 + z) - F(t, u_0) - F'(t, u_0)z| \leq |z| \cdot \tilde{F}(t, |z|), \quad \tilde{F}(t, 0) \equiv 0,$$

so gilt die in Zeile 3 der Tabelle V geforderte Ungleichung mit

$$\tilde{f}(t, z) = [F'(t, u_0)]^+ z + z \tilde{F}(t, z).$$

Die Forderung für die Fehlerschranke $w(t)$ erhält dann die Gestalt

$$|\dot{u}_0 + F(t, u_0)| \leq -\dot{w} - F'(t, u_0)w - w \tilde{F}(t, w), \quad w(0) = w(1) = 0, \quad w(t) \geq 0.$$

Auf diese Weise ist es also möglich, die Ableitung $F'(t, u_0)$ und damit den „Hauptbestandteil“ $F(t, u_0) + F'(t, u_0)(u - u_0)$ der Funktion $F(t, u)$ bei der Fehlerabschätzung voll zu berücksichtigen.

Bei den vom Defekt ausgehenden Abschätzungen kann man oft auch bequem mit nicht-linearen Operatoren A arbeiten und dadurch die Ergebnisse weiter verbessern. Darauf soll hier jedoch nicht eingegangen werden.

4. Formeln für ein systematisches Abschätzungsverfahren bei Anfangswertaufgaben erster Ordnung

Wir leiten nun Abschätzungsformeln für die Anfangswertaufgabe

$$\dot{u} = F(t, u) \text{ für } a \leq t \leq b, \quad u(a) = c \quad (21)$$

her, indem wir das in Abschnitt 3 genannte abstrakte Ergebnis aus [11] benutzen. Ein von diesen Formeln ausgehendes Abschätzungsverfahren für Rechenanlagen wird an anderer Stelle beschrieben.

Voraussetzungen:

a) $F(t, u)$ und $F'(t, u)$ seien stetig für $a \leq t \leq b$, $-\infty < u < \infty$.

b) Es gebe eine für $a \leq t \leq b$, $0 \leq z < \infty$ stetige, in z wachsende Funktion $\tilde{F}(t, z)$ derart, daß gilt:

$$\begin{aligned} |F(t, u_0 + z) - F(t, u_0) - F'(t, u_0)z| &\leq |z| \tilde{F}(t, |z|), \\ \tilde{F}(t, 0) &\equiv 0 \quad (a \leq t \leq b, \quad -\infty < z < \infty). \end{aligned}$$

Dabei bedeute $u_0(t)$ eine stetig differenzierbare Näherungslösung.

Zur funktionalanalytischen Formulierung des Problems definieren wir:

\mathfrak{R} sei die Menge der auf $[a, b]$ stetigen Funktionen $u(t)$,

\mathfrak{S} sei die Menge der Kompositionen $\{u, \lambda\}$ mit $u \in \mathfrak{R}$ und reellem λ ;

$u \leq v$ bedeutet $u(t) \leq v(t)$ für $a \leq t \leq b$,

$\{u, \lambda\} \leq \{v, \mu\}$ bedeutet $u \leq v$, $\lambda \leq \mu$;

$Au = \begin{pmatrix} \dot{u} - q(t)u \\ u(a) \end{pmatrix}$ auf $\mathfrak{D} = \{u \in \mathfrak{R} : \dot{u}(t) \text{ stetig}\}$,

$Bu = \begin{pmatrix} f(t, u) \\ c \end{pmatrix}$

mit $q(t) = F'(t, u_0)$, $f(t, u) = F(t, u) - q(t)u$.

Die Gleichung $Au = Bu$ ($u \in \mathfrak{D}$) ist dann der gegebenen Aufgabe äquivalent.

Man überlegt sich leicht, daß der Operator A von monotoner Art ist. $Tu = A^{-1}Bu$ hat die Gestalt

$$Tu = e^{\int_a^t q(s) ds} \left[c + \int_a^t e^{-\int_a^s q(\tau) d\tau} f(s, u(s)) ds \right].$$

Mit der Norm $\|u\| = \max |u(t)|$ ist \mathfrak{R} ein halbgeordneter Banachraum. Da T stetig, jede Menge $\langle x, y \rangle$ abgeschlossen und konvex und $T\langle x, y \rangle$ kompakt ist, erfüllt T nach dem SCHAUDER-schen Fixpunktsatz [8] auch die Voraussetzung [FPS].

Die Einschließungsvoraussetzung für $B(u_0 + z) - B u_0$ in Tabelle V, Zeile 1, ist wegen (22) erfüllt mit

$$K_1[\alpha, \beta] = \begin{pmatrix} -\max \{\beta^+ \tilde{F}(t, \beta^+), \alpha^- \tilde{F}(t, \alpha^-)\} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad K_2[\alpha, \beta] = \begin{pmatrix} \max \{\alpha^+ \tilde{F}(t, \alpha^+), \beta^- \tilde{F}(t, \beta^-)\} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man nach Zeile 1, Tabelle V das

Ergebnis¹¹⁾: Gibt es eine stetig differenzierbare Funktion $w(t)$ derart, daß

$$\begin{aligned} |-\dot{u}_0 + F(t, u_0)| &\leq \dot{w} - F'(t, u_0) w - w \tilde{F}(t, w), \\ | -u_0(a) + c | &\leq w(a), \quad 0 \leq w(t) \quad (a \leq t \leq b) \end{aligned}$$

gilt, so existiert eine Lösung $u^*(t)$ der gegebenen Anfangswertaufgabe (21), und es gilt die Fehlerabschätzung

$$|u^*(t) - u_0(t)| \leq w(t) \quad (a \leq t \leq b).$$

Literatur

- [1] L. COLLATZ, Aufgaben monotoner Art., Arch Math. **3** (1952), S. 366—376.
- [2] L. COLLATZ, Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. 2. Aufl., Berlin/Göttingen/Heidelberg 1955.
- [3] L. COLLATZ u. J. SCHRÖDER, Einschließen der Lösungen von Randwertaufgaben. Num. Math. **1** (1959), S. 61—72.
- [4] R. KALABA, On Nonlinear Differential Equations, the Maximum-Operation, and Monotone Convergence. J. Math. Mech. **8** (1959), S. 517—574.
- [5] L. V. KANTOROVITCH, The Method of Successive Approximations for Functional Equations. Acta math. **71** (1939), S. 63—97.
- [6] J. J. KOLODNER, Functional Equations involving Transformations of "Bounded Variation". Proceedings of ICM, **2** (1954), S. 127—128.
- [7] D. MORGENSTERN, Beiträge zur nichtlinearen Funktionalanalysis. Diss. T.U. Berlin 1952.
- [8] J. SCHAUDER, Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen. Stud. Math. **2** (1930), S. 171—182.
- [9] J. SCHRÖDER, Nichtlineare Majoranten beim Verfahren der schrittweisen Näherung. Arch. Math. **7** (1956), S. 471—484.
- [10] J. SCHRÖDER, Über das Newtonsche Verfahren. Arch. Rat. Mech. Anal. **1** (1957), S. 154—180.
- [11] J. SCHRÖDER, Anwendung von Fixpunktsätzen bei der numerischen Behandlung nichtlinearer Gleichungen in halbgeordneten Räumen. Arch. Rat. Mech. Anal. **2** (1959), S. 177—192.
- [12] WEISSINGER, J., Zur Theorie und Anwendung des Iterationsverfahrens. Math Nachr. **8** (1952) S. 193—212.

Anschrift: Dr. J. SCHRÖDER, Reinbek (Bez. Hamburg), Kirchenallee 10

¹¹⁾ Es sei darauf aufmerksam gemacht, daß man dies Ergebnis auch auf andere Weise erhalten kann, indem man nämlich $Au = \begin{pmatrix} \dot{u} - F(t, u) \\ u(a) - c \end{pmatrix}$ definiert und ausnutzt, daß dieser (nichtlineare) Operator A von monotoner Art ist und die Existenz einer Lösung u^* bereits aus anderen Sätzen folgt. Hier hat man bei Anwendung eines Fixpunktsatzes also nur den Vorteil, daß man eine einheitliche, Existenzaussagen und Fehlerabschätzungen umfassende Theorie bekommt. In anderen Fällen dagegen, wie z. B. bei der Aufgabe (1), ist die Existenz einer Lösung nicht allgemein gesichert. Außerdem benötigt man die Voraussetzung [FPS] dabei, um zu zeigen, daß eine Lösung zwischen bestimmten Schranken liegt.

Funktionentheoretische Behandlung eines Schubbeulproblems bei Rechteckplatten

Von H. WENZEL

Eine Rechteckplatte mit den Seitenlängen a und b sei frei drehbar gelagert und werde durch gleichmäßig verteilte Schubkräfte längs ihres Randes belastet. Die kritische Schublast ist dem Beulwert k proportional, wobei der Proportionalitätsfaktor von den geometrischen und elastischen Eigenschaften der Platte abhängt. Wird mit $w = w(x, y)$ die Durchbiegung der Platte bezeichnet, so ergibt sich k als kleinster positiver bzw. größter negativer Eigenwert der Differentialgleichungs-Eigenwertaufgabe

$$\Delta \Delta w = -2k \frac{\pi^2}{b^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \quad w = 0, \quad \Delta w = 0 \text{ längs Rand} \quad \dots \dots \dots (1).$$

Formale Auflösung der in (1) stehenden Differentialgleichung nach w mittels der GREENschen Funktion und beiderseitige Bildung einer zweiten gemischten Ableitung führt zu einer zu (1) äquivalenten Eigenwertaufgabe in Integralgleichungsgestalt für die gemischte zweite Ableitung von w , nämlich

$$\frac{\partial^2 w(u, v)}{\partial u \partial v} = -2k \frac{\pi^2}{b^2} \int_F K(u, v; x, y) \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} dx dy \quad (2),$$

wobei F die Rechteckfläche bezeichnet und der Kern K gleich der gemischten zweiten Ableitung der GREENschen Funktion nach u und v ist. Wie die GREENsche Funktion, so ist auch K als Summe einer Bipotentialfunktion $H(u, v; x, y)$ bezüglich x, y und einem singulären Summanden darstellbar. Mittels der GOURSATSchen Formel

$$H(u, v; x, y) = \operatorname{Re} [\bar{z} \varphi_1(z) + \varphi_2(z)], \quad (z = x + iy; \bar{z} = x - iy) \quad (3)$$

kann die Bipotentialfunktion H durch zwei holomorphe Funktionen $\varphi_1(z)$ und $\varphi_2(z)$ angegeben werden. Die Randwerte der GREENschen Funktion haben Randwerte von $\varphi_1(z)$ und $\varphi_2(z)$ zur Folge. Es zeigt sich, daß die Randwerte von $\varphi_1(z)$ angegeben werden können, ohne hierbei Randwerte von $\varphi_2(z)$ benutzen zu müssen. Infolgedessen kann $\varphi_1(z)$ unabhängig von $\varphi_2(z)$ bestimmt werden.

Mittels konformer Abbildung geht man vom Rechteck zum Einheitskreis über, überträgt $\varphi_1(z)$ in den Einheitskreis, benutzt dort die POISSONSche Integralformel, geht zum Rechteck zurück und wertet das entstehende Integral für $\varphi_1(z)$, das über den Rechteckrand zu erstrecken ist, aus. Benutzt man hierbei Eigenschaften der elliptischen Funktionen, so ist die Auswertung in geschlossener Form möglich. In der gleichen Weise gelingt eine explizite Angabe von $\varphi_2(z)$ in geschlossener Form. Dies führt insgesamt zu der folgenden Kerndarstellung, wobei $A = u + iv$ gesetzt wird, $\wp(z)$ bzw. $\zeta(z)$ die WEIERSTRASSsche \wp - bzw. ζ -Funktion mit den Grundperioden $2a$ und $2bi$ ist und $\eta = \zeta(a)$, $\eta' = \zeta(bi)$ bedeutet:

$$K(u, v; x, y) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{ab i}{\pi^2} (\zeta^2(z) - \wp(z)) - \frac{\eta \eta'}{\pi^2} z^2 + \sum_{\substack{A^* = A, -A \\ A, -A}} \zeta(z - A^*) \left[\frac{i}{8\pi} (\bar{z} - \bar{A}^*) + \frac{1}{4\pi^2} (a\eta' + bi\eta)(z - A^*) - \frac{ab i}{2\pi^2} (\zeta(z) - \zeta(A^*)) \right] \right\} \quad (4).$$

Da für die \wp - bzw. ζ -Funktion die stark konvergierenden Thetareihen zur Verfügung stehen, ist (4) mit erträglichem Rechenaufwand auch numerisch erfaßbar. Durch (2) und (4) ist ein neuer (exakter) Ausgangspunkt zur Beulwertbestimmung geschaffen. Aus (2) und (4) kann man sich mittels eines Näherungsverfahrens, etwa durch Übergang zu einem linearen Gleichungssystem, eine Näherung für den Beulwert und die zugehörige Eigenfunktion verschaffen. Zur Herstellung besserer Schranken soll ein Extremalprinzip benutzt werden. Da der Kern unsymmetrisch ist, kann das klassische Extremalprinzip nicht verwendet werden. Es gelingt jedoch, (2) so umzuformen, daß eine neue Integralgleichung entsteht, die die gleichen reellen Eigenwerte wie (2) hat, und die einer Klasse von Eigenwertaufgaben angehört, für die von H. MÜLLER, (Math. Nachrichten 1954) u. a. Existenzaussagen und Extremalprinzipien angegeben wurden.

Es ergibt sich mit

$$X(x, y) = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \quad (X, X) = \int_F \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy,$$

den bezüglich (x, y) und (u, v) symmetrischen Kernen

$$K_1(x, y; u, v) = K(u, v; x, y) + K(x, y; u, v)$$

$$K_2(x, y; u, v) = \int_F K(s, t; x, y) K(s, t; u, v) ds dt$$

und den Abkürzungen

$$(K_v, X, X) = \int_F \int_F K_v(x, y; u, v) \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w(u, v)}{\partial u \partial v} dx dy du dv \quad (v = 1, 2)$$

das Extremalprinzip

$$\left(\frac{1}{k} \right)_{\max} = \max_{\substack{X \text{ mit} \\ \text{Randkand} \geq 0}} \left[-\frac{\pi^2}{b^2} \frac{(K_1 X, X)}{(X, X)} + \frac{\pi^2}{b^2} \frac{1}{(X, X)} \sqrt{(K_1 X, X)^2 - 4(K_2 X, X)(X, X)} \right] \quad (5)$$

bzw.

$$\left(\frac{1}{k}\right)_{\min} = \min_{\substack{X \text{ mit} \\ \text{Radikand} \geq 0}} \left[-\frac{\pi^2}{b^2} \frac{(K_1 X, X)}{(X, X)} - \frac{\pi^2}{b^2} \frac{1}{(X, X)} \sqrt{(K_1 X, X)^2 - 4(K_2 X, X)(X, X)} \right] \quad (6).$$

Die Existenz mindestens eines reellen Eigenwertes ist gesichert, falls es ein X gibt, für das der Radikand in (5), (6) nicht negativ ausfällt. Ist X_0 eine Funktion, für die der Radikand ≥ 0 ist und $\frac{1}{k_0}$ eine zugehörige Näherung von $\left(\frac{1}{k}\right)_{\max}$ bzw. $\left(\frac{1}{k}\right)_{\min}$, so liefert

$$X_1 = X_0 + \varepsilon X_0^* \text{ mit } X_0^* = \left(\frac{1}{k_0}\right)^2 X_0 + 2 \frac{1}{k_0} \frac{\pi^2}{b^2} K_1 X_0 + \frac{4\pi^4}{b^4} K_2 X_0$$

bessere Näherungswerte X_1 und k_1 , falls ε so gewählt wird, daß die mit X_1 gebildete eckige Klammer in (5) bzw. (6) möglichst groß bzw. klein ausfällt.

Die hier vorgelegte funktionentheoretische Methode ist bei Beibehaltung der NAVIERSchen Randbedingungen auch für kompliziertere Randbelastungen durchführbar.

Anschrift: Dr. H. WENZEL, Dresden N 30, Leipziger Str. 304

B. RECHENTECHNIK

Zur systematischen Behandlung von modernen Steuerungsaufgaben in digitalen Rechenanlagen

Von F. R. GÜNTSCH*) und W. HÄNDLER**)

Seit der bekannten Arbeit von WILKES und STRINGER aus dem Jahre 1953, wird die Operationensteuerung digitaler Rechenautomaten zweckmäßigerweise durch sogenannte Mikroprogrammsteuerwerke beschrieben und technisch in enger Anlehnung an diese Beschreibungsweise realisiert. Das WILKESsche Konzept sieht eine Anordnung vor, die in Bild 1 dargestellt ist¹⁾. Zur Veranschaulichung sei ein Beispiel angeführt, in dem die Funktionsweise eines Mikroprogrammsteuerwerkes beschrieben wird, das gerade einen Befehl ausführt, der der Multiplikation ähnlich ist. Der Operationsteil des Befehls ist in den sogenannten Operationshalter OP des Mikroprogrammwerkes übernommen worden und soll genau wie der Inhalt des sogenannten Mikrobefehlsschalters MZ in oktaler Schreibweise angegeben werden. Der betrachtete Befehl habe die Ordnungsnummer 13 (dezimal) in einem Befehlscode, der aus insgesamt 64 Befehlen besteht, sei also oktalt mit 15 bezeichnet. Die Oktalzahl 15 wird demgemäß zu Anfang in OP abgesetzt und verändert sich dort nicht, bis die Befehlsschleife später von neuem begonnen wird. MZ soll zwei Oktalstellen umfassen und enthält zunächst die Schlüsselzahl 00. Die Zahl 1500 wird nunmehr entschlüsselt und führt zur Auswahl einer senkrechten Matrixlinie. In einer sogenannten Z -Matrix entsteht die neue Schlüsselzahl 01, die in MZ abgesetzt wird. Im nächsten Taktintervall wird die Zahl 1501 entschlüsselt, wird wiederum eine neue Schlüsselzahl 1502 erzeugt usw., Zugleich mit jeder Auswahl einer neuen Schlüsselzahl in der Z -Matrix sorgt die A -Matrix für die Verteilung von Steuersignalen an die verschiedenen Teile des Rechenautomaten. Im ersten Taktintervall soll z. B. die Mikrooperation 17 (dezimal), im zweiten Taktintervall z. B. die Mikrooperationen 6 und 7 (dezimal) angeregt werden. Eine vollständige Beschreibung des Ablaufs gibt das Ablaufdiagramm wieder. Im nächsten Taktintervall tritt eine Verzweigung auf, je nachdem, ob eine bestimmte Größe q (z. B. die niedrigste Stelle im Multiplikatorregister) „0“ oder „1“ ist. Im Falle „0“ soll die Mikrooperation 19, im Falle „1“ dagegen die Mikrooperation 20 ausgelöst werden. Zugleich wird während dieses Taktintervalls eine neue Schlüsselzahl 1503 gewonnen. Im darauffolgenden Taktintervall wird die Mikrooperation 10 ausgelöst und zugleich die neue Schlüsselzahl 1504 erzeugt. An dieser Stelle soll jedoch die natürliche Folge der ganzen Zahlen im allgemeinen zunächst verlassen werden, weil eine Schleifenbildung zu leisten ist. Bedingt wird in Abhängigkeit von einem Zähler (z. B. ein Zähler, der die Anzahl der bereits berücksichtigten Stellen des Multi-

*) Telefunken G. m. b. H., Werk Anlagen Hochfrequenz, Konstanz a. B.

**) Universität des Saarlandes, Lehrstuhl für Angewandte Mathematik.

1) In einigen Punkten weicht der folgende kurze Rückblick etwas vom WILKESschen Original ab.

plikators mitzählt) entweder auf Schlüsselzahl 1501 zurückgeschaltet oder nach Beendigung der Operationen (z. B. nach Beendigung der Teiladditionen am Ende der Multiplikation) auf die Schlüsselzahl 1505 übergeleitet. Dabei werden jeweils die im Ablaufdiagramm angegebenen Mikrooperationen ausgelöst. Nach Beendigung der Schleife werden neue Schlüsselzahlen in der Folge 1505, 1506, 1507 usw. erzeugt und entsprechend Mikrooperationen angeregt. Für die Schlüsselzahl 1507 schließlich ist vorgesehen, daß der Programmablauf hier so lange aufgehalten wird, bis eine bestimmte Bedingung / (Fertigsignal) erfüllt ist. Das Verhalten wird im Ablaufdiagramm als Rückkehrschleife in den gleichen Knotenpunkt (1507) dargestellt. Nach Beendigung des ganzen Befehls 15 schließlich wird MZ gelöscht, während der Operationsteil eines neuen Befehls nach OP übernommen wird. Mit diesen Operationen beginnt ein neuer Durchlauf der Befehlsschleife.

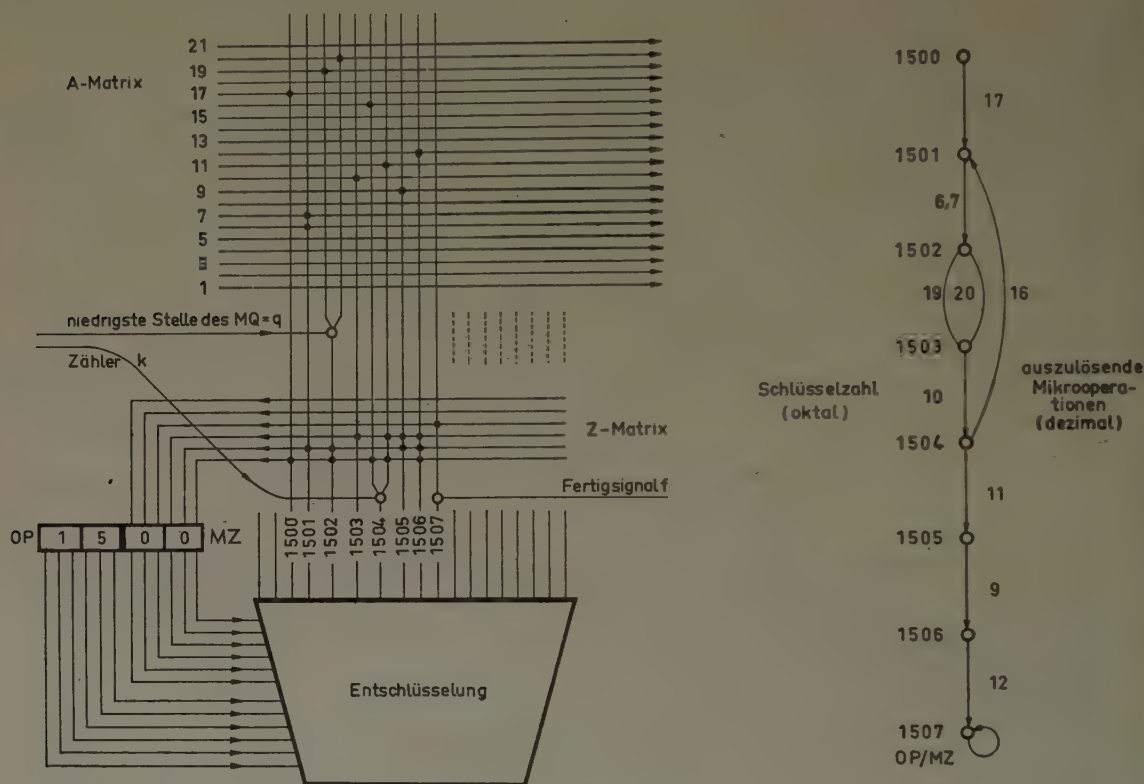


Bild 1

Die beiden beim WILKESschen Schema dargestellten Matrizen dienen also einmal der Erzeugung einer neuen Schlüsselzahl (Z-Matrix) und zum anderen der Auslösung der gewünschten Steuersignale (A-Matrix), die an die verschiedenen Elemente, Einheiten usw. des Rechners geleitet werden.

Das WILKESsche Konzept war auch der Ausgangspunkt für eine Modifikation, die von BILLING und HOPMANN entwickelt wurde. Im folgenden soll die Übersichtlichkeit des Mikroprogrammkonzepts durch eine systematische Beschreibung herausgearbeitet werden. Die weitere Beschreibung stützt sich wesentlich auf den Begriff der Konjunktion. Man will nämlich ein bestimmtes Steuersignal (Mikrooperation) für einen Rechner Teil dann auslösen, wenn eine Reihe von Bedingungen gleichzeitig erfüllt ist. Diese Bedingungen werden als Konjunktionen ausgeführt. Z. B. ist zu fordern, daß eine betrachtete Mikrooperation zu einem ganz bestimmten Zeitpunkt bzw. in einer ganz bestimmten Situation $\langle MZ \rangle$ während des Ablaufs einer Operation, d. h. eines Befehls, ausgelöst wird. Außerdem muß dem Steuerwerk wirklich der Auftrag für diese Operation gemäß $\langle OP \rangle$ vorliegen. Weitere Bedingungen können der Konjunktion gegebenenfalls hinzugefügt werden, z. B. „jedoch nur ausführen, wenn der Akkumulator positiv ist“.

Zunächst sei ein wesentlicher Baustein des Mikroprogrammsteuerwerks definiert, auf den sich die folgenden Ausführungen stützen. Die (r) -Kette (sprich: die r -aus- n -Kette) ist ein Aggregat bzw. Register aus n binären Speicherelementen, z. B. Flip-Flops, mit folgenden Eigenschaften:

1. Der Informationsinhalt der (r) -Kette wechselt zu bestimmten durch einen Takt gegebenen Zeitpunkten τ_i .

2. Im Taktintervall zwischen τ_i und τ_{i+1} enthalten jeweils genau r von den n Elementen eine „Eins“, während die übrigen eine „Null“ enthalten. Demgemäß ist die $\binom{n}{r}$ -Kette genau $\binom{n}{r}$ verschiedener (erlaubter) Informationszustände fähig.

3. Übergänge zwischen den $\binom{n}{r}$ möglichen Informationszuständen können durch entsprechende Verknüpfungsschaltungen beliebig bewirkt werden (Gruppenverhalten).

Der Grund, einen speziellen Code, nämlich den $\binom{n}{r}$ -Code, zu verwenden, liegt in der großen Ökonomie der Leitungsführung, wobei für jedes zu speichernde Element nur eine Seite der Information zwecks Entschlüsselung herangeführt zu werden braucht.

Für die weiteren Ausführungen ist es belanglos, welche Werte für n und r angenommen werden. Den maximalen Verschlüsselungseffekt erzielt man offenbar, wenn $r \approx \frac{n}{2}$ ist.

Damit ergibt sich für verschiedene Werte n :

n	2	3	4	5	6	7	8	9
Zahl der möglichen Informationszustände	2	3	6	10	20	35	70	126

Jeder Entschlüsselungsprozeß reduziert die Verhaltensweise einer $\binom{n}{r}$ -Kette zu der einer $\binom{n'}{1}$ -Kette, wobei $n' = \binom{n}{r}$ ist. Es werden daher in den folgenden Beschreibungen $\binom{n}{1}$ -Ketten zugrundegelegt, weil Entschlüsselungsprozesse als hinreichend bekannt vorausgesetzt werden dürfen.

Der Mikrobefehlszähler MZ sowie der Operationshalter OP werden als $\binom{n}{1}$ -Ketten ausgelegt, so daß jeder der beiden zu einem bestimmten Zeitpunkt nur eine „Eins“ an bestimmter Stelle enthält. Spannen nun die beiden Register zusammen mit den jeweils auszulösenden Mikrooperationen ein räumliches Koordinaten-Gitternetz auf, so ergibt sich das folgende Bild (Bild 2). In einem räumlichen Gitterpunkt (x, y, z) ist eine Konjunktion dann vorhanden, wenn die zugeordnete Mikrooperation z anlässlich des Ablaufs der Operation x (bzw. $[OP]$) zu einem Zeitpunkt, in dem der Mikrobefehlszähler MZ den Stand y anzeigt, ausgelöst werden soll. x, y und z sollen jeweils nur diskrete Werte 0, 1, 2 ... annehmen.

Mehrere verschiedene $z', z'', z''' \dots$ usw. (Mikrooperationen) können zu einem Paar (x, y) gehören und bilden einen Mikrobefehl (Senkrechte in Bild 2).

Ein auf „Eins“ gesetztes Flip-Flop x des Operationshalters OP liefert das „Eins“-Potential an alle in der betreffenden x -Ebene liegenden Konjunktionen (z. B. Dioden-Konjunktionen). Ein ebenfalls zu „Eins“ gesetztes Flip-Flop y des Mikrobefehlszählers MZ liefert das „Eins“-Potential an alle in der y -Ebene liegenden Konjunktionen. Nur in der Schnittlinie (x, y) sind beide Bedingungen erfüllt (Durchschnitt!) und die dort liegenden Konjunktionen liefern Steuersignale $z', z'', z''' \dots$ usw., sofern nicht eine Konjunktion noch von weiteren Bedingungen („aber nur wenn ...“) abhängig gemacht wird. Durch diese Koordinatenwahl wird eine verhältnismäßig kleine Menge von allen Konjunktionen, nämlich die Senkrechte in der Darstellung, angesprochen, während die weitaus größere Menge der Konjunktionen des Quaders unwirksam bleiben. Von diesem Auswahlprinzip macht man bekanntlich bei der Informationsverarbeitung häufig Gebrauch.

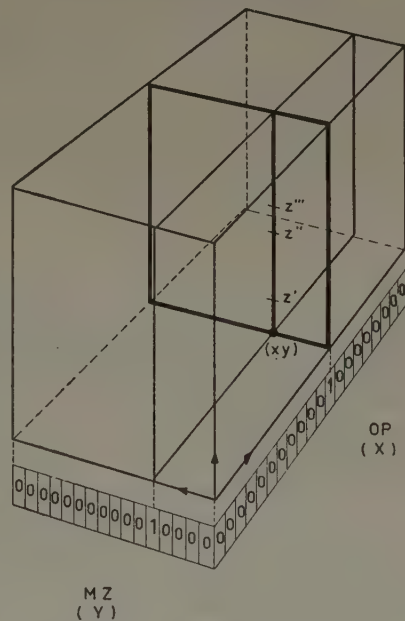


Bild 2

Alle Ansteuerleitungen, die für eine Auslösung der Mikrooperation z bestimmt sind, demgemäß also in einer Ebene (z) liegen, werden über Disjunktionen wieder zusammengeführt. Das Modell ist also zunächst auf die zweistufige Schaltungstechnik zugeschnitten.

Eine Schnittebene x entspricht einem bestimmten Befehl, z. B. wie in einem früher gewählten Beispiel „die Multiplikation“ (Bild 3). Eine solche Schnittebene teilt sich wiederum in eine A -Matrix und eine Z -Matrix in Analogie zu den Ausführungen über das Mikroprogrammsteuerwerk nach WILKES. Während die Matrizen bei WILKES einer Gesamtdarstellung des Steuerwerks entsprechen, werden die Matrizen A^x und Z^x hier für eine einzelne Operation x (z. B. Multi-

plikation) definiert. Für ein früher gezeigtes Beispiel, das einer Operation ähnlich der Multiplikation entspricht, ergibt sich in dieser Darstellung wegen des Fortfalls jeglicher Verschlüsselung ein sehr übersichtliches Bild des Steuerungsprozesses.

Die früher gegebene Beschreibung ist sinngemäß auf die hier gezeigte Darstellung zu übertragen.

Der gleiche Sachverhalt kann auch in etwas anderer Weise durch Matrizen dargestellt werden. Dabei sei angenommen, daß für jeden Befehl x eine Matrix $b^x = (b_{yz}^x)$ gebildet wird derart, daß jedes Element b_{yz}^x die Werte 0, 1 oder B_{yz} annehmen kann, je nachdem, ob keine Konjunktion, die Grundkonjunktion (x, y) oder die Grundkonjunktion zusammen mit einer Bedingung B_{yz} verschaltet ist. Die Matrix-Elemente erscheinen in Bild 3 als Zeichen der Notenschrift.

In der oben gewählten Darstellung entsprechen den Werten b_{yz}^x die Noten: keine Note (0), Viertelton (1), Halbton (B_{yz}^x). Die Bedingungen B_{yz}^x werden neben den zugehörigen Halbtönen vermerkt.

In Matrizenschreibweise ergibt sich, wenn wir y und z jeweils in $y_0, y_1, y_2 \dots$ bzw. $z_0, z_1, z_2 \dots$ unterteilen

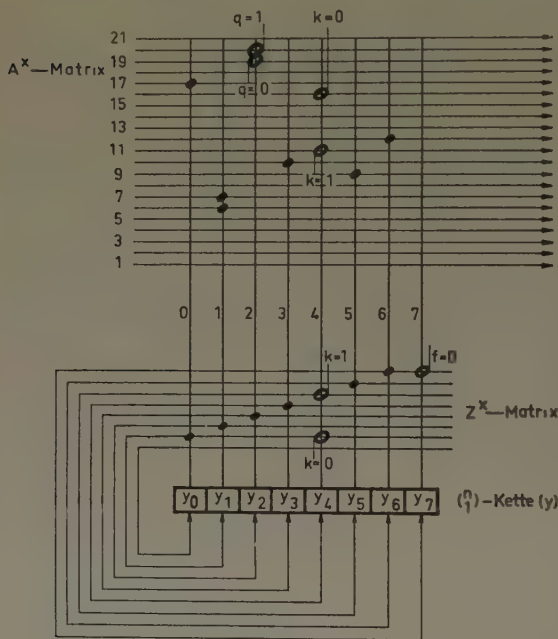


Bild 3

$$b^x y' \Rightarrow \delta'$$

mit

$$\delta = (z_0 z_1 z_2 z_3 \dots)$$

$$y = (y_0 y_1 y_2 y_3 \dots)$$

und

$$b^x = (b_{yz}^x).$$

Im Falle zweistufiger Schaltkreise nehmen die b_{yz}^x die Werte 0, 1 oder z. B. k, s , bzw. $p \cdot \bar{q}$ (Bedingungskonjunktion) an. Die $y_0 y_1 y_2 y_3 \dots$ nehmen jeweils die Werte 0 oder 1 an. Im Falle einer (n) -Kette z. B. nimmt jeweils nur ein y während eines Taktintervalls den Wert 1 an. Für die Matrizenmultiplikation gilt in diesem Falle, daß jede elementare Multiplikation durch eine Konjunktion und jede Addition durch eine Disjunktion ersetzt wird. Das „Ergibt“-Zeichen (\Rightarrow) ist im Sinne von Definitionen des „Äquivalenzkalküls“ nach FROMME zu verstehen. Danach löst ein Zustand y zur Zeit t einen Mikrobefehl δ zur Zeit $(t+1)$ aus. Auf die Matrizen-Darstellung wird an dieser Stelle nicht weiter eingegangen. Sie ist der Notenschriftdarstellung gleichwertig, die hier der größeren Anschaulichkeit wegen gewählt worden ist.

Mit einer solchen Anordnung — sie soll im folgenden „Steuerwerk für einfachen Programmablauf“ genannt werden — sind die konventionellen Steuerungsprobleme, wie Verzweigung, Schleifenbildung und bedingtes Verweilen, zu lösen. Die vereinfachende Koordinatendarstellung unter Reduktion auf (n) -Ketten ist eingeführt worden, weil sich mit den gleichen Hilfsmitteln die verwickelteren Steuerungsprobleme bei der Synchronarbeit mehrerer Einheiten eines Rechners (oder auch bei gleichzeitigem Betrieb mehrerer Rechner, die miteinander in Verbindung stehen) einfacher darstellen lassen.

Wie in den vorigen Kapiteln ausführlich dargelegt wurde, gibt es bei mehreren miteinander korrespondierenden Einheiten solche, die bei anderen Einheiten Anmeldungen vornehmen, um zu einem geeigneten Zeitpunkt von diesen abgefertigt zu werden. Bei anderen Einheiten liegt der umgekehrte Fall vor, daß nämlich Anmeldungen anderer Einheiten zur Abfertigung angenommen werden müssen. Weiter gibt es Einheiten, die Anmeldungen sowohl tätigen als auch solche empfangen.

Im folgenden soll zuerst ein Steuerwerk beschrieben werden, das als Anmelder auftritt.

Ausgangspunkt der Betrachtungen ist ein Steuerwerk der oben beschriebenen Art. Dabei sei daran erinnert, daß beliebige Sprünge in der (n) -Kette für y möglich sind, daß also keine technische Notwendigkeit besteht, aufeinanderfolgende Schlüsselzahlen in der y -Kette benachbart zu legen. Auf diese Weise ist es möglich, zwei Gruppen von y -Ebenen zu unterscheiden.

Die Mikrobefehle der ersten Gruppe enthalten Operationen, die mit einem Eingriff in den Ablauf anderer Werke verbunden sind, während alle übrigen Mikrobefehle der zweiten Gruppe zugeteilt werden. Die zur ersten Gruppe gehörigen y -Werte nennen wir „wesentlich“.

Die anmeldenden Werke sollen fortan mit i ($i = 1, 2, 3 \dots$) durchnummeriert werden. Es soll weiterhin mit y_{ik}^m ein Mikrobefehl des Werkes i bezeichnet werden, der eine Anmeldung beim Werk m beinhaltet. Das k gibt dabei an, welcher Vorrangstufe diese Anmeldung im Werk m zugeteilt wird. Man sieht, daß die wesentlichen y als „Durchschnitt“ für die gemeinsam betroffenen Steuerwerke i und m auftreten. Diese Elemente des Steuerwerks entsprechen damit den „Durchschnitts-Elementen“, die zur Informationsübertragung zwischen den beiden kommunizierenden Werken vorgesehen sind, (z. B. gemeinsam benutzte Registerelemente auf der Grenzlinie zweier kommunizierender Speicher).

Als nächstes sollen nun die Verhältnisse im angerufenen Werk m betrachtet werden.

Zu diesem Zweck wird als Zusatz zu dem oben beschriebenen Steuerwerk für einfachen Programmablauf ein Steuerwerksteil aufgebaut, der durch das in Bild 4 wiedergegebene Koordinatensystem beschrieben wird. Den einzelnen Werten i entsprechen die Nummern der verschiedenen anmeldenden Werke. Die k kennzeichnen die verschiedenen Vorrangklassen innerhalb der betrachteten Operationensteuerung, während j die verschiedenen verlangten Operationen (ent-

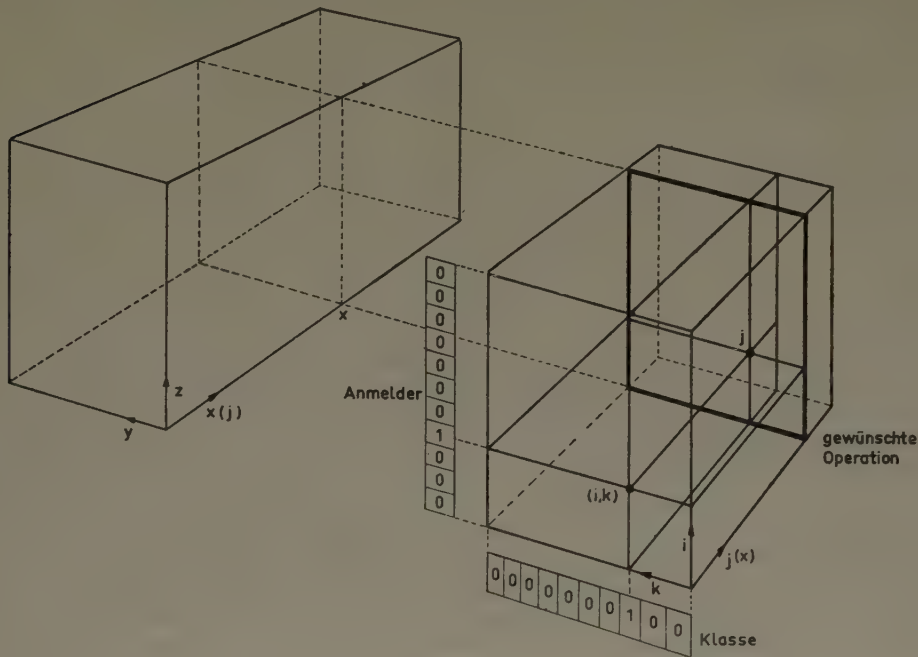


Bild 4

sprechend den x der einfachen Mikroprogrammwerke) kennzeichnet. Eingangsgrößen sind in diesem Quader (entsprechend den x und y des einfachen Steuerwerkes) i und k . j ergibt sich als Ausgang (entsprechend z im einfachen Steuerwerk) und wird als Eingang für das zum gleichen Werk gehörige einfache Steuerwerk benutzt. Die Koordinaten i und k sind je einer $(\frac{n}{1})$ -Kette zugeordnet²⁾.

Die k -Kette gewährleistet, daß jeweils die Anmeldung der höchsten Vorrangklasse k abgearbeitet wird. Die i -Kette sorgt dafür, daß mehrere gleichrangige Anmeldungen zyklisch nacheinander erledigt werden. Den früher betrachteten x -Schnitten entsprechen hier k -Schnitte. Den Gitterpunkten (Konjunktionen) einer solchen Ebene werden die verschiedenen y -Werte der anmeldenden Werke (konjunktiv) zugeführt.

Bei konstantem k , d. h. bei der Betrachtung von Vorgängen, während derer die $(\frac{n}{1})$ -Kette für k keine Veranlassung hat, zu einer höheren Klasse überzugehen, gilt, daß i zyklisch fortgeschaltet wird und somit alle anmeldenden Einheiten mit gleichem Gewicht berücksichtigt werden. Wird jedoch in einem beliebigen Zustand i die Klasse entsprechend den Erfordernissen erhöht, so kann sich das System nicht merken, welche der Einheiten zuletzt abgefragt worden ist. Die $(\frac{n}{1})$ -Kette für i schaltet sich entsprechend den Erfordernissen der neuen Klasse wiederum zyklisch fort. Findet die Rückkehr in die alte (niedrigere) Klasse statt, so ist der erste Wert von i zufallsbedingt in bezug auf die alte Klasse. Von diesem zufälligen Wert i ausgehend schaltet

²⁾ Wie früher können auch $(\frac{n}{2})$ -Ketten zugelassen werden, die durch Entschlüsselung zu den $(\frac{n}{1})$ -Ketten dieses Modells führen. Eine einfachere Beschreibung ergibt sich jedoch hier unter Verwendung von $(\frac{n}{1})$ -Ketten.

die (i) -Kette jedoch wieder zyklisch fort. Es bleibt festzustellen, daß das Einsetzen der i -Registrierung nach jedem Klassensprung immer von neuem mit einem zufälligen i -Wert beginnt. Bei selteneren Klassensprüngen kann die Regellosigkeit, mit der das Abarbeiten der Einheiten gleichen Vorrangs beginnt, keine merkliche Wirkung haben. Denn es kann angenommen werden, daß dann zwischen zwei aufeinanderfolgenden Klassensprüngen genügend Zeit für die Abwicklung eines vollständigen i -Zyklus zur Verfügung steht. Auch kann angenommen werden, daß im allgemeinen alle Einheiten mit gleicher Wahrscheinlichkeit abgefertigt werden.

Sollte jedoch bei häufigeren Klassensprüngen die störende Wirkung untragbar werden, so können besondere Maßnahmen getroffen werden.

In diesem Falle wird jeder Klasse k (bzw. mindestens jeweils einigen Klassen gemeinsam) eine eigene (i) -Kette für i zugeordnet. Die „Eins“ in einer solchen Kette bleibt stehen, wenn das System aus dieser Klasse herausspringt, und sie setzt ihre Wanderung von dort aus zyklisch fort, wenn das System diese Klasse zur weiteren Verarbeitung freigibt.

Es gilt natürlich als Grundbedingung für eine Durchschaltung, daß die angerufene Einheit m nicht gerade mit der Erledigung eines Auftrages beschäftigt ist. Für diese Bedingung ist ein Bereitschafts-Flip-Flop zuständig, das seinen Inhalt allen Konjunktionen des Quaders zuführt.

Anschriften: Dr. F. R. GÜNTSCH, Konstanz a. B., Hansjakobweg 15,
Dr. W. HÄNDLER, Geislautern/Saar, Hammerstr. 25

Der elektronische Analogrechner und seine Verwendung in der Praktischen Mathematik^{*)}

Von J. HEINHOLD

1. Einführung

Bei der Entwicklung des Analogrechners zum modernen elektronischen Gerät waren es zunächst vor allem Ingenieurprobleme, Probleme der Steuerung und Regelung, der Übertragung von Signalen oder der Simulation technischer Vorrichtungen, die seine heutige Gestalt und seine Einsatzmöglichkeiten entscheidend beeinflussten. Wir wollen im folgenden den elektronischen Analogrechner vom Standpunkt des Mathematikers betrachten. Diese Betrachtungsweise führt einerseits zu jenen mathematischen Anwendungen, die auch den Ingenieur interessieren, zum anderen liefert sie jedoch noch eine Reihe neuer Anwendungsmöglichkeiten und Problemstellungen.

Ursprünglich stand ja der Analogrechner — und zwar auf mechanischer Grundlage — im Mittelpunkt des rechnerischen Interesses, bedingt durch die Inbetriebnahme des Differential-Analyzers von V. BUSH im Jahre 1930. Nach dem Aufkommen der digitalen programmgesteuerten elektronischen Rechenautomaten ab 1945 verlor er mehr und mehr an Bedeutung. In der Zwischenzeit hat sich der Analogrechner sozusagen elektrisch verjüngt und seit der Entwicklung rein elektronischer Multiplikatoren ab 1953 sehr viel an Terrain zurückgewonnen. Heute gibt es eine Fülle von großen, mittleren und kleinen Geräten, und der elektronische Analogrechner nimmt als universelles Rechenggerät neben dem Digitalrechner wieder eine achtbare Stellung ein. Nach den Übersichtsberichten über Digitalrechner auf den GAMM-Tagungen der letzten Dekade hat der Analogrechner nunmehr wieder eine Chance erhalten, sich vorzustellen und zu zeigen, was er mathematisch kann.

Ehe wir ihm hierzu Gelegenheit geben, sei zunächst die Arbeitsweise des elektronischen Analogrechners und seiner Rechenelemente kurz skizziert.

1.1 Arbeitsweise und Rechenelemente

Bei dem derzeit am weitesten verbreiteten elektronischen Analogrechner, dem Gleichstromrechner, werden die abhängigen Rechengrößen durch Gleichspannungen gegen Erde dargestellt, deren Absolutbeträge \leq einer vorgegebenen konstanten Spannung (vielfach 100 oder 50 oder 10 Volt), der sog. „Bezugsspannung“, sind. Sie dient als Recheneinheit. Bei der Bearbeitung eines Problems auf dem Rechner muß dieses zunächst mit Hilfe geeignet zu wählender Maßstabsfaktoren so dimensioniert werden, daß die Beträge aller auftretenden abhängigen Größen die Einheit nicht überschreiten. Als einzige unabhängige Veränderliche steht auf dem elektronischen Analogrechner die Zeit zur Verfügung. Die Rechenelemente setzen sich im Prinzip aus einigen wenigen elektrischen Bauelementen zusammen. Für die sog. linearen Rechenoperationen Addition und Integration nach der Zeit sind das der Ohmsche Widerstand, die Kapazität und der elektronische Verstärker (Bild 1).

^{*)} Auf Einladung der Tagungsleitung gehaltener Hauptvortrag

Der Verstärker liefert zwischen der Gitterspannung E und der Anodenspannung x im Bereich der zulässigen Spannungen theoretisch den Zusammenhang

$$x = -V E \quad (1).$$

V wird als „Verstärkungsfaktor“ des Verstärkers bezeichnet. Bei einem endlichen Wert von V kann x nur 0 sein, wenn $E = 0$ ist. In Wirklichkeit ist das jedoch nicht exakt der Fall. Es findet eine sog. „Nullpunktwanderung“ oder „Drift“ statt. Bei genauen Rechnern kann diese Drift durch technische Maßnahmen sehr klein gehalten werden und bei Bruchteilen von Millivolt pro Minute liegen. Wir können daher theoretisch die obige Beziehung unseren Betrachtungen zugrundelegen und treffen hinsichtlich der Bauelemente noch die folgenden idealisierenden Annahmen:

- Der Strom durch den Verstärker (Gitterstrom) kann vernachlässigt werden. (Er ist bei genauen Rechnern von der Größenordnung 10^{-10} Ampère.)
- Der Verstärkungsfaktor V ist so groß, daß $1/V$ praktisch gleich Null gesetzt werden kann. (Bei Rechnern ohne besondere Stabilisierung ist V von der Größenordnung 10^3 — 10^5 , bei Stabilisierung 10^6 — 10^8 .)
- Die verwendeten Widerstände und Kapazitäten sind konstant. (Wird durch besondere technische Maßnahmen weitgehend erreicht.)

Mit diesen Annahmen läßt sich nun die Arbeitsweise der linearen Rechenelemente im Prinzip sofort darstellen. Zunächst die Multiplikation mit einem konstanten Faktor k ($0 < k < 1$): $x = k \cdot x_1$. Sie erfolgt mit Hilfe eines Potentiometers (Bild 2).

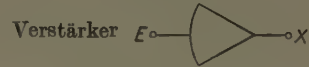
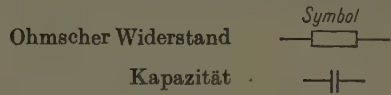


Bild 1

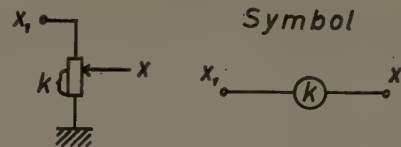


Bild 2

Die lineare Kombination von Rechengrößen mit konstanten Koeffizienten erfordert einen Verstärker und wird durch die Schaltung nach Bild 3a geliefert. Aus den KIRCHHOFFSchen Gesetzen folgt unter Berücksichtigung der Annahme a), daß durch den Verstärker kein Strom fließt, sowie mit $x = -V E$

$$\sum_{v=1}^n \frac{x_v - E}{R_v} = \frac{E - x}{R}, \quad x = \frac{-\sum_{v=1}^n \frac{R}{R_v} x_v}{1 + \frac{1}{V} \left(1 + \sum_{v=1}^n \frac{R}{R_v} \right)} \quad (2).$$

Symbol

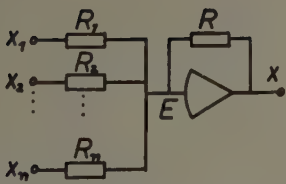


Bild 3a

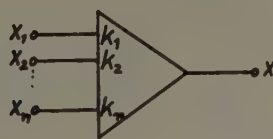


Bild 3b

Mit der Forderung b) ergibt sich, $R/R_v = k_v$ gesetzt:

$$x = -\sum_{v=1}^n k_v x_v \quad (3).$$

Bei Benutzung nur eines Einganges ergibt sich die Multiplikation mit einer Konstanten $k_1 > 1$:

$$x = -k_1 x_1, \quad k_1 = \frac{R}{R_1}.$$

Dabei ist jedoch zu berücksichtigen, daß alle explizit auftretenden Rechengrößen x den zulässigen Variationsbereich nicht überschreiten dürfen, also absolut < 1 sein müssen.

Die Vorzeichenumkehr ergibt sich für $R = R_1$.

$$x = -x_1,$$

und damit die Möglichkeit der Subtraktion (Symbol Bild 3b).

Vielfach sind in den Summierelementen feste Koeffizienten, z. B. 1, 4, 10, eingebaut. Vorgesetzte Potentiometer ermöglichen dann die Multiplikation mit vorgegebenen Koeffizienten.

Wir erhalten aus dem Summierelement ein Integrierelement, wenn wir den Widerstand R durch eine Kapazität C ersetzen (Bild 4). Da die Stromstärke J gleich der zeitlichen Ableitung der Kondensatorladung ist, erhält man wie oben mittels Annahme a)

$$-\sum_{v=1}^n \left(x_v + \frac{x}{V} \right) \frac{1}{R_v} = C \left(1 + \frac{1}{V} \right) \frac{dx}{dt},$$

unter der Annahme b) sodann

$$x = -\frac{1}{C} \int_0^t \sum_{v=1}^n \frac{x_v}{R_v} dt + x(0) = -\frac{1}{RC} \int_0^t \sum_{v=1}^n k_v x_v dt + x(0) \quad \dots \quad (4).$$

Es liefert also das Ersetzen des Widerstandes R durch die Kapazität C ein Integrierelement für die Integration der obigen Linearkombination nach der Zeit. Dabei sind die Koeffizienten k_v , dieselben wie bei der Addition, es erscheint lediglich die resultierende Größe in einem anderen Maßstab. Wir haben damit ein äußerst vielseitiges Rechenelement, das für die Addition, bzw. die lineare Kombination mehrerer Summanden, zur Multiplikation mit einer Konstanten > 1 , zur Vorzeichenumkehr und — nach Ersetzen des Widerstandes R durch eine Kapazität C — zur Integration einer Linearkombination von zeitabhängigen Funktionen mit konstanten Koeffizienten Verwendung finden kann.

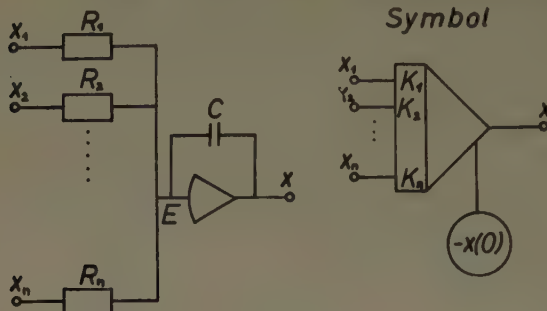


Bild 4

Auch die Differentiation nach der Zeit

läßt sich im Prinzip einfach schalten. Doch

wird man sie wie jede instrumentelle Differentiation nach Möglichkeit vermeiden. Hier vor allem deswegen, weil sie neben der Annahme b), also dem Verschwinden von E , auch noch das Verschwinden von dE/dt fordert, was wegen des „Rauschens“ der Verstärker weit weniger zu rechtfertigen ist. Man wird daher nach Möglichkeit Differentiationen auf dem Analogrechner vermeiden und nach geeigneter Umformung der Aufgabe mit Integrationen arbeiten.

Bei der Erläuterung der Arbeitsweise der Rechenelemente für Addition und Integration sind wir von gewissen idealisierenden Annahmen ausgegangen. In Wirklichkeit sind diese nicht exakt erfüllt. So erhält man, wenn man die Drift (durch Anbringung einer Ersatzspannung U_B) und den Gitterstrom I_g berücksichtigt, an Stelle von (3) und (4)

$$x = -\sum_{v=1}^n k_v x_v + \left[U_B \left(1 + \sum_{v=1}^n k_v \right) - I_g R \right] \quad \dots \quad (5)$$

bzw.

$$x = -\frac{1}{RC} \int_0^t \sum_{v=1}^n k_v x_v dt + x(0) + \frac{t}{RC} \left[U_B \sum_{v=1}^n k_v - I_g R \right] + \Delta x(0) \quad \dots \quad (6),$$

also Fehlerglieder bei Addition und Integration, wobei besonders gravierend ist, daß das Fehlerglied der Integration linear mit der Zeit anwächst. Das hat weitgehende Folgerungen für den Bau von elektronischen Analogrechnern. Man muß nämlich dafür sorgen, daß der Fehler einen vorgegebenen zulässigen Betrag nicht übersteigt. Das kann einmal dadurch erreicht werden, daß man nur kurze Rechenzeiten zuläßt. Das ist bei den sog. „repetierenden Rechnern“ der Fall, bei denen z. Z. die Rechenzeiten etwa von 0,1 bis 100 sec variieren. Die Rechenzeit wird am „Zeitgeber“ eingestellt. Dieser liefert zudem eine Rechengröße, die sog. „Maschinenzeit“, die das Intervall von -1 bis 1 linear mit der Rechenzeit durchläuft. Nach Ablauf der Rechenzeit wiederholt sich, nach einer kurzen Pause, in der der Integrationsfehler annulliert und der Ausgangszustand wiederhergestellt wird, derselbe Rechengang usw. Braucht man jedoch lange Rechenzeiten, was etwa bei der Überwachung technischer Anlagen der Fall ist, so muß der Integrerverstärker laufend stabilisiert werden. Das geschieht im sog. „Langzeitrechner“ mittels sog. „zerhackerstabilisierter“ Verstärker, die während der Rechnung in kurzen Zeitabständen die Fehlerkorrektur vornehmen. Auch mit dem Langzeitrechner kann man repetierend rechnen, doch sind hierfür die eigentlichen repetierenden Rechner wesentlich bequemer, da sie es ermöglichen, während der Rechnung einzelne Parameterwerte und sogar die Schaltung zu ändern, was vor allem für viele Probleme des Mathematikers sehr vorteilhaft ist.

Während Addition und Integration auf dem elektronischen Analogrechner prinzipiell einfach durchzuführen sind, verursachte die Multiplikation in rein elektronischer Weise, also ohne Verwendung mechanischer Bauteile, technisch wesentlich größere Schwierigkeiten, die eigentlich erst

in allerletzter Zeit in einer hinsichtlich der Genauigkeit befriedigenden Weise gemeistert werden konnten. Der genaueste elektronische Multiplikator ist wohl z. Z. der sog. Time-Division-Multiplikator, der auf der Erzeugung von Impulsen veränderlicher Breite und Höhe beruht und mit Hilfe von Transistoren eine statische Genauigkeit von 0,01 bis 0,02% erreicht und damit an die Genauigkeit der linearen Rechenelemente herankommt. Von den vielen anderen weniger genauen elektronischen Multiplikatoren sei wegen seiner weiten Verbreitung nur noch der sog. Parabelmultiplikator erwähnt, der nach dem Prinzip $xy = ((x+y)^2 - (x-y)^2)/4$ arbeitet und die zum Quadrieren nötigen Parabeläste durch ein Geradenpolygon mit Hilfe der Kennlinien von Dioden annähert. Er kommt bestens zu statischen Genauigkeiten von 1%. Mit Hilfe eines Multiplikators und eines Verstärkers läßt sich auch eine Divisions- sowie eine Quadratwurzel-schaltung angeben.

Sehr verwöhnt haben uns die Erbauer der neuesten Analogrechner hinsichtlich der Ein- und Ausgabe. Die Eingabe von Koeffizienten in die Potentiometer ist weitgehend digitalisiert und automatisiert. Zur Eingabe empirisch gewonnener Funktionen steht ein für hohe Rechengeschwindigkeiten verwendbarer rein elektronischer Funktionsgeber zur Verfügung, der eine vorgegebene Kurve mit Hilfe von Diodenstrecken durch ein Geradenpolygon annähert. Daneben gibt es für nicht zu kurze Rechenzeiten auch mechanische Funktionsgeber, die eine mit magnetischer Tinte aufgezeichnete Kurve abtasten und die Ordinaten als Spannungen in den Analogrechner eingeben. Zu erwähnen sind noch Funktionsgeber für spezielle Funktionen, wie „Absolutbetrag“, „tote Zone“, „Begrenzung“, wovon für den Mathematiker die „Sprungfunktion“ von besonderem Wert ist, weil damit der „bedingte Sprung“, wie wir ihn vom Digitalrechner her kennen, und logische Operationen auf dem Analogrechner realisiert werden können.

Die Ausgabe kann analog und zwar rein elektronisch und damit sehr schnell mit Hilfe der Meßbildröhre, oder langsamer mit elektromechanischen Schreibern, sowie digital erfolgen mittels digitalem Voltmeter, das mit Hilfe einer Druckvorrichtung die Ergebnisse gedruckt oder auch auf Lochband gestanzt ausgeben kann. Zudem gibt es Analog-digital- und Digital-analog-Umsetzer. Man hat so die Möglichkeit, Ergebnisse des Analogrechners in einen Digitalrechner einzugeben, etwa als Ausgangsbasis für eine iterative Weiterbehandlung, oder auch Ergebnisse eines Digitalrechners zur Steuerung einer Analoganlage zu benutzen, so daß beide Anlagen durch Ausnutzung ihrer typischen Eigenschaften sich ergänzen und zusammenarbeiten können.

Lassen sie mich am Schluß dieser Einführung noch kurz die wesentlichen Eigenschaften des elektronischen Analogrechners durch einen Vergleich mit entsprechenden Eigenschaften des herkömmlichen Digitalrechners herausstellen.

digital

Vergleich

analog

Ein Rechenwerk, das alle im Problem auftretenden arithmetischen Rechenoperationen zu erledigen hat

komplizierte Programmierung

empfindlich gegen Störungen

Genauigkeit des Rechenwerkes nur vom technischen Aufwand abhängig

praktisch unbeschränkte Variationsbereiche der Rechengrößen

leistungsfähige Speicher

Verwendung fester Programme

vor allem für algebraische Probleme geeignet

bedingter Sprung

Rechenzeit abhängig vom Umfang der Probleme

Für jede im Problem auftretende Rechenoperation ein eigenes Rechenelement (Baukastenprinzip)

einfache Programmierung

unempfindlich

Genauigkeit der Rechenelemente durch physikalische Eigenschaften bedingt. (Bei linearen Elementen z. Z. 0,1—0,01% erreichbar)

beschränkte Variationsbereiche

Speicher noch in Entwicklung

Verwendung fester Programme bei auswechselbarem Steckbrett

eigenes Rechenelement für die Integration nach der Zeit,

daher vor allem für gewöhnliche Differentialgleichungen geeignet.

bedingter Sprung

Rechenzeit praktisch unabhängig vom Umfang der Probleme

Nach Beginn der Rechnung steht sofort in jedem Zeitpunkt und an jedem Ausgang die zugehörige Rechengröße zur Verfügung.

Es lassen sich mehrere Probleme gleichzeitig rechnen

Die Darstellung der abhängigen Rechengrößen durch eine physikalische Größe, wie die Spannung gegen Erde, kann heute keineswegs mehr als typisch für den Analogrechner angesehen werden, vielmehr ist es das Baukastenprinzip, nach dem für jede in einem Problem auftretende Rechenoperation ein eigenes Rechelement bereit steht. Diese werden gemäß dem durch die mathematische Problemstellung gegebenen Zusammenhang unmittelbar durch Kabel oder auf einem Steckbrett durch Stecker miteinander verbunden.

1.2. Dimensionierung

Wenden wir uns nun der Behandlung mathematischer Probleme auf dem elektronischen Analogrechner zu, so ist in jedem Falle zunächst eine geeignete Dimensionierung zu finden, denn keine der abhängigen Größen darf den Variationsbereich $-1 \dots 1$ überschreiten. Zudem sollen diese Größen, um möglichst genaue Ergebnisse zu erzielen, den zulässigen Bereich gut ausnützen. Es handelt sich somit zunächst darum, aus dem gestellten Problem heraus Schranken für diese Größen zu ermitteln. Mitunter ergeben sich solche Schranken etwa bei gewissen technischen oder physikalischen Problemen unmittelbar aus der Problemstellung. Bisweilen kann man auch auf bekannte Sätze und mathematische Abschätzungsverfahren, etwa bei Wurzeln algebraischer Gleichungen, zurückgreifen. Meist steht man hier jedoch vor neuen Problemen und wird versuchen, geeignete Vereinfachungen und Vernachlässigungen vorzunehmen, um dadurch zunächst einmal zu rohen Schranken zu kommen. Auf diesem Gebiete ist zweifellos in mathematischer Hinsicht noch viel zu leisten. Untersuchungen, wie man eine zulässige Dimensionierung in Richtung einer optimalen Rechengenauigkeit verbessern kann, sind in letzter Zeit von HERRMANN [1] und HERSCHEL [2] durchgeführt worden. Daher ist neben der Dimensionierung der Amplituden aus dem gestellten Problem heraus noch eine geeignete Ähnlichkeitstransformation der unabhängigen Veränderlichen zu ermitteln, um den hier interessierenden Bereich auf den Bereich der Maschinenzeit zu transformieren bzw. bei Verwendung mechanischer Ausgabegeräte die Rechengeschwindigkeit auf die Geschwindigkeit der Ausgabegeräte abzustimmen. Erst dann kann nach erfolgter Transformation der gestellten Aufgabe hierfür die Schaltung, das sog. „Programm“, mittels der oben eingeführten Rechensymbole angefertigt und auf dem Rechner gesteckt werden.

2. Der Einsatz des elektronischen Analogrechners in der Praktischen Mathematik

2.1. Gewöhnliche Differentialgleichungen

Da der Analogrechner ein eigenes Rechelement für die Integration besitzt, eignet er sich natürlich vor allem für die Lösung von Differentialgleichungen, und zwar, da er nur eine unabhängige Veränderliche, die Zeit, besitzt, für gewöhnliche Differentialgleichungen und Systeme derartiger Gleichungen. Für die Erstellung des Programms ist es dabei nicht sehr wesentlich, ob diese Differentialgleichungen linear oder nichtlinear sind, ob die Koeffizienten konstant oder Funktionen der Zeit sind, sofern diese vom Analogrechner selbst erzeugt werden können. Ein dankbares Arbeitsfeld des Analogrechners liefern daher Untersuchungen über Existenz und Stabilität periodischer oder asymptotischer Lösungen und die experimentelle Bestimmung des zugehörigen Einzugsbereiches oder eines anderen ausgezeichneten Bereiches des Parameterraumes. Als ein

1. Beispiel sei die autonome Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \dot{x}(A_1 + A_2 x^2) + A_3 x + A_4 x^3 = 0 \quad \text{mit} \quad A_2 > 0, A_4 > 0$$

angeführt. Es interessiert die Existenz periodischer Lösungen, die Größe der eventuellen Periode, asymptotische Lösungen und deren Abhängigkeit von den Parametern.

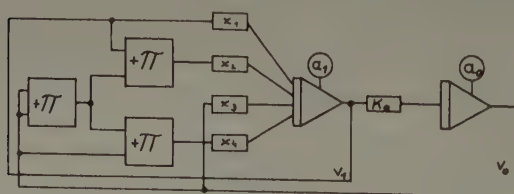


Bild 5

Man kann durch eine geeignete Transformation zwei Parameter eliminieren und erhält dann die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \dot{x}(\lambda_0 + x^2) + \lambda_1 x + x^3 = 0.$$

Die Theorie garantiert für $\lambda_0 < 0, \lambda_1 \geq 0$ genau eine asymptotisch stabile periodische Lösung, also in der Phasenebene einen stabilen Grenzzykel. Wir übergangen der Kürze halber die Dimensionierung.

Das Programm (Bild 5) benötigt 3 Multiplikatoren und 2 Integrierverstärker und ermöglicht uns, unmittelbar zu vorgegebenen Parameterwerten die Phasenkurven, den Grenzzykel, sowie die Periode der periodischen Lösung zu ermitteln und den Einfluß der Parameterwerte auf die Gestalt der Grenzzykel zu untersuchen. Bild 6 gibt den Sachverhalt für die Parameterwerte $\lambda_0 = -0,1; \lambda_1 = 0$ und $\lambda_0 = -0,1; \lambda_1 = 1$ wieder.

Als 2. Beispiel seien die (1:1)-Zulässigkeitsgebiete, d. h. die Gebiete des Anfangswerttraumes, die nicht über die zulässigen Variationsbereiche $-1 \dots 1$ in x und \dot{x} hinausführen, für die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + (1 - e^{-t})(\dot{x} + x) = 10x^3 \cos \omega t$$

auf dem Analogrechner ermittelt.

Die in Bild 7 angegebene Schaltung verwendet 5 Integrierelemente und 5 Multiplikatoren. Nach der Theorie existiert für hinreichend kleine Beträge der Anfangswerte eine Lösung, und $x = 0$ ist eine asymptotisch stabile Ruhelage.

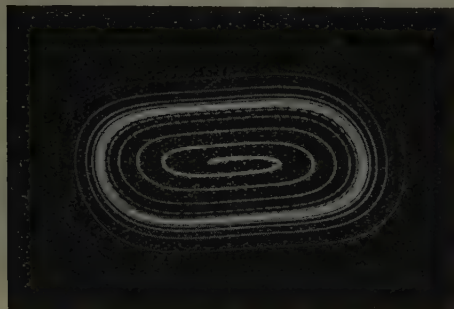


Bild 6

Die Untersuchung einzelner Lösungen, z. B. für die Werte $\omega = 0; 1; 10$, liefert auf dem Analogrechner experimentell Randpunkte der entsprechenden (1:1)-Zulässigkeitsbereiche, wobei in Bild 8 zusammengehörige Punkte geradlinig verbunden sind. Bild 9 zeigt weiterhin zum Vergleich einige Phasenkurven der verwandten Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \dot{x} + x - 10x^3 = 0,$$

welche die beiden Sattelpunkte $x = \pm 1/\sqrt{10}$, $\dot{x} = 0$ und den im Nullpunkt befindlichen stabilen Strudelpunkt erkennen lassen.

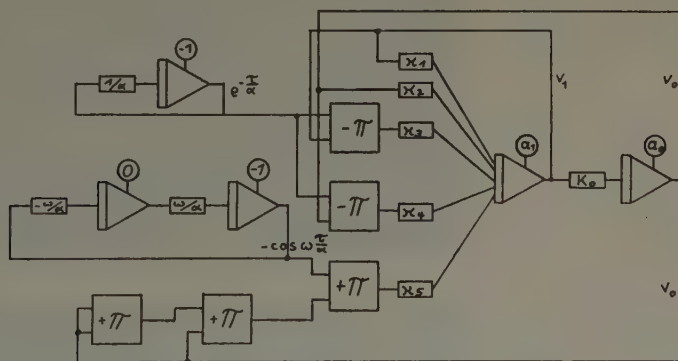


Bild 7

Das 3. Beispiel zeigt die Ermittlung der Resonanzkurve harmonischer Zwangsschwingungen bei der DUFFINGschen Differentialgleichung (Bild 10)

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + x(1 + \varepsilon x^2) = \cos \eta t \quad \text{mit } \lambda = 0,050, \varepsilon = 4/15.$$

Man erhält die sonst nur näherungsweise zu ermittelnde Abhängigkeit der maximalen Amplitude vom Quadrat der Frequenz η auf dem Analogrechner unmittelbar aufgezeichnet, indem man durch einen geeigneten Zeitfaktor die resultierende Schwingung sehr schnell macht, so daß sich die maximale Amplitude für jedes η auf dem Bildschirm abzeichnet und dann die Frequenz η mit der Zeit zu und wieder abnehmen läßt. In Bild 11 wandert η innerhalb einer Repetierzeit von

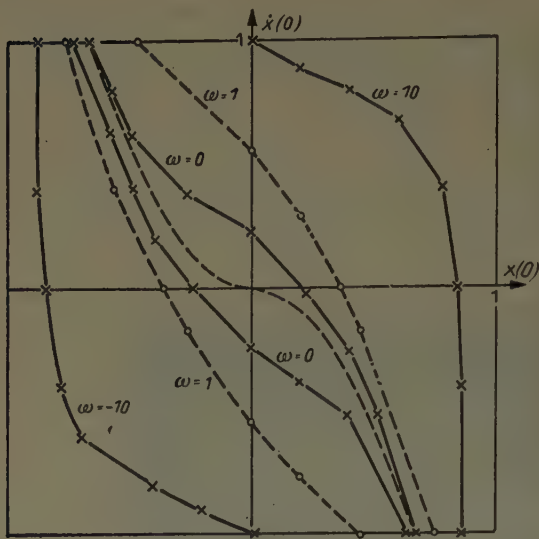


Bild 8

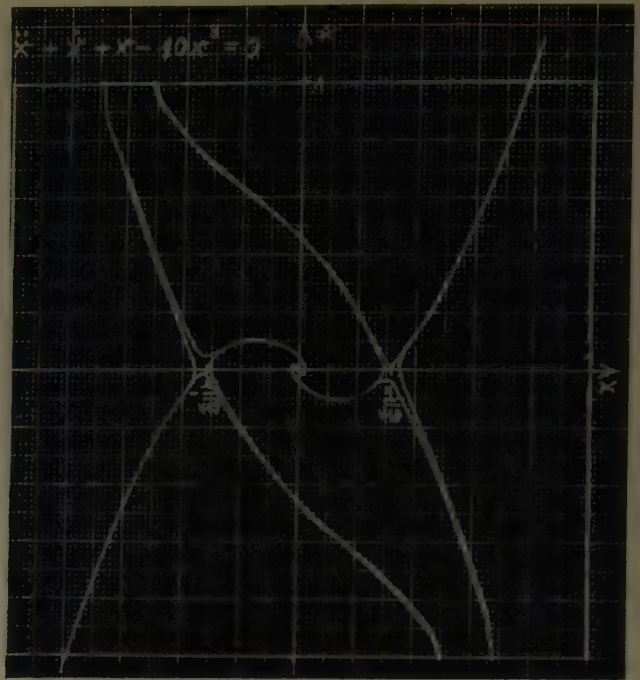


Bild 9

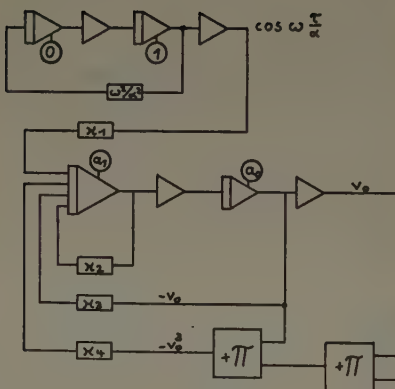


Bild 10

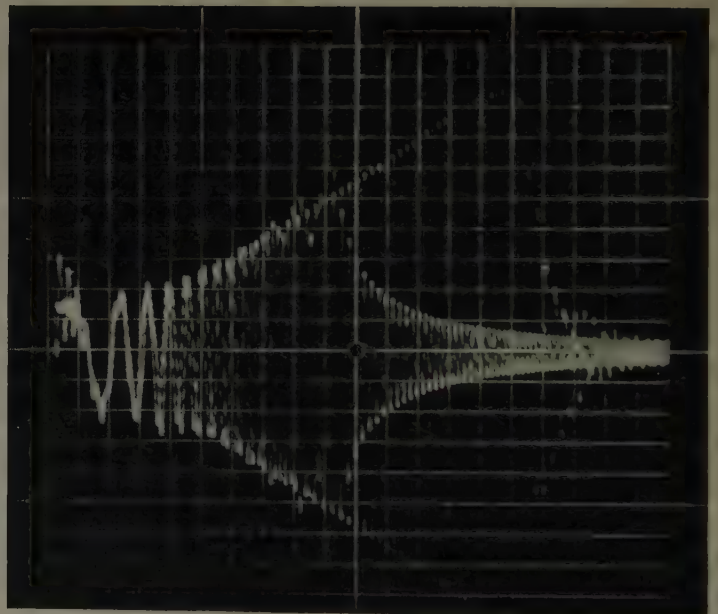


Bild 11

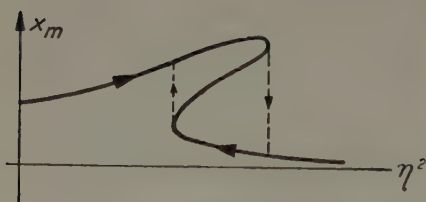


Bild 12

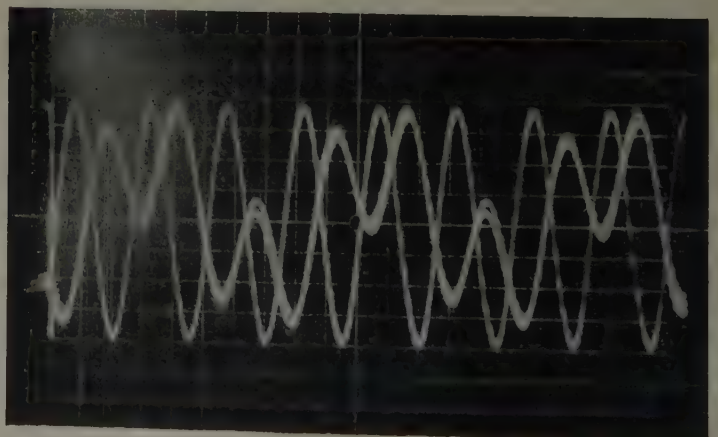


Bild 13

30 sec von 1 bis 3 und wieder zurück. Natürlich hätte man auch, ähnlich wie bei der Bestimmung der Zulässigkeitsbereiche im vorigen Beispiel, die Resonanzkurve punktweise ermitteln können. Theoretisch hat die Resonanzkurve den in Bild 12 skizzierten Verlauf. Stabilitätsuntersuchungen zeigen, daß das mittlere Kurvenstück einem instabilen Zustand entspricht, so daß also die tatsächliche Resonanzkurve den vom Analogrechner angegebenen Verlauf hat.

Bild 13 zeigt eine der bei diesen Differentialgleichungen auftretenden sog. subharmonischen Schwingungen, bei der die Periode der resultierenden Schwingung ein Vielfaches der Periode der Zwangskraft (hier das Dreifache) besitzt. Hinsichtlich der Realisierung dieser Erscheinung, die einige experimentelle Kniffe beim repetierenden Analogrechner erfordert, sei auf eine Arbeit meines Mitarbeiters K. KUNTZE [3] hingewiesen.

2.2. Partielle Differentialgleichungen

sind auf dem elektronischen Analogrechner, da nur eine unabhängige Veränderliche, die Zeit, zur Verfügung steht, nicht unmittelbar zu behandeln.

Man kann natürlich gewisse Typen über einen Produkt- oder Summenansatz wieder auf die Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückführen. Eine allgemeine auf Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen anwendbare Näherungsmethode erhält man jedoch, wenn man die Ableitungen nach einer Veränderlichen, z. B. x , durch Differenzenquotienten einfacher oder höherer Approximation ersetzt. Man kommt so zu einem System von gewöhnlichen Differentialgleichungen für $u(x_i, t)$, also angenähert die gesuchte Lösung an den Stützstellen x_i als Funktion der anderen Veränderlichen, der Zeit. Die Konvergenz dieses Verfahrens hat vor kurzem ALBRECHT [4] in München untersucht. Im folgenden 4. Beispiel sei die Methode an einem einfachen Sachverhalt, der eindimensionalen Wärmeleitung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

mit den Randbedingungen $u(0; t) = 0$, $(\partial u / \partial x)_{x=l} = 0$ und der Anfangsbedingung $u(x; 0) = U = \text{const.}$ mit $a^2 = 0,4$, $l = 2\pi$, $U = 0,8$ bei 10 Stützstellen x_i durchgeführt. Für das entsprechende Differentialgleichungssystem (bei den einfachsten Differenzenquotienten)

$$\frac{du_i}{dt} = 1,119 (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) \quad i = 1, 2, \dots, 9$$

$$\frac{du_{10}}{dt} = 1,119 (-u_{10} + u_9)$$

erhalten wir das folgende Programm (Bild 14). Der Vergleich der erhaltenen Werte mit den theoretisch ermittelten Werten zeigt (siehe Tabelle 1) eine gute Übereinstimmung, bis auf die letzte angegebene Zeit, die bereits die Grenze der Anwendungsmöglichkeit eines Repetierrechners erreicht. Eine Arbeit über die praktische Anwendung des Analogrechners auf partielle Differentialgleichungen von SEYFERTH [5] erscheint in der Zeitschrift „Elektronische Rechenanlagen“.

Tabelle 1

Rep-Zeit T in sec	2	4	10	20	50	110
Zeit t	2,747	5,495	13,736	27,473	68,681	151,098
$u_1(t)$	0,254	0,181	0,116	0,079	0,029	0,006
$u(4\pi/21, t)$	0,251	0,180	0,114	0,077	0,027	0,003
$u_6(t)$	0,782	0,727	0,568	0,399	0,145	0,024
$u(24\pi/21, t)$	0,787	0,730	0,572	0,398	0,143	0,018
$u_{10}(t)$	0,797	0,790	0,700	0,508	0,187	0,034
$u(40\pi/21, t)$	0,800	0,795	0,705	0,510	0,182	0,023

4*

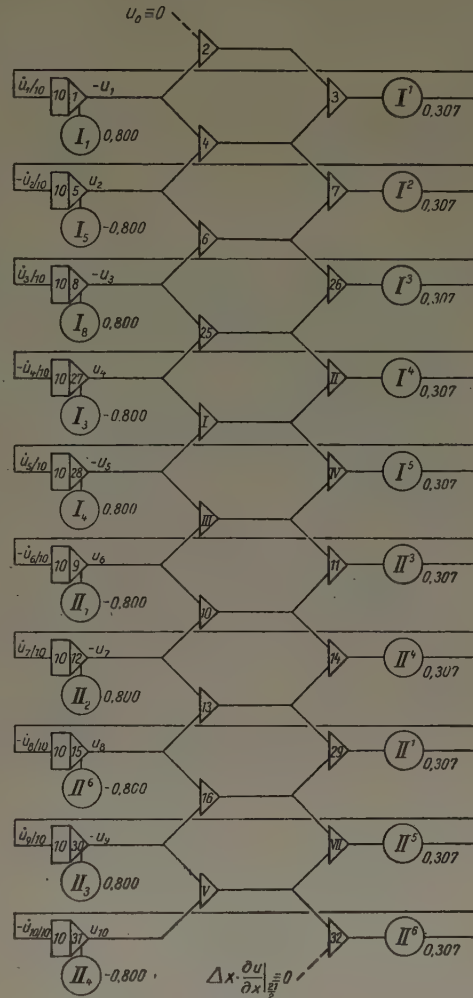


Bild 14

Wir haben in Bild 14 das Programm eines linearen Differentialgleichungssystems mit konstanten Koeffizienten. Im Prinzip bereitet es keine Schwierigkeit, Systeme mit nicht konstanten Koeffizienten oder nichtlineare Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen zu behandeln und damit auch — falls die Kapazität der Rechenanlage groß genug ist — in das bisher kaum bearbeitete Gebiet der nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen vorzustoßen.

2.3. Lineare Gleichungssysteme

Auf die Lösung von Systemen linearer Differentialgleichungen läßt sich unter gewissen Voraussetzungen auch die Lösung eines Systems linearer algebraischer Gleichungen

$$\sum_{\nu=1}^n a_{\nu\mu} x_{\nu} - b_{\mu} = 0, \quad \mu = 1, 2, \dots, n$$

zurückzuführen, nämlich auf die Bestimmung der nach Abklingen des Einschwingvorganges auftretenden Endzustandes des Differentialgleichungssystems

$$\sum_{\nu=1}^n a_{\nu\mu} x_{\nu} - b_{\mu} = \frac{dx_{\mu}}{dt}, \quad \mu = 1, 2, \dots, n,$$

falls ein solcher existiert, was von der Koeffizientenmatrix abhängt. In vielen Fällen gelingt es durch geeignete Maßstabsfaktoren, diese Bedingungen zu erfüllen. Der Aufwand an Koeffizientenpotentiometern ist dabei beträchtlich. Auch bei großen Anlagen mit 100 bis 150 Potentiometern kommt man dann höchstens auf 9—12 Gleichungen. Man begibt sich damit in ein Gebiet, das zweifellos dem Digitalrechner vorbehalten ist. Trotzdem verlockt eben die Eigenart des elektronischen Analogrechners, ihn auch für diese Aufgabe heranzuziehen, weil er eine bequeme Möglichkeit bietet, den Einfluß einzelner Koeffizienten auf das Resultat lediglich durch Drehung am Potentiometer zu untersuchen, und auch nichtlineare Probleme im Prinzip keine wesentlich größeren Schwierigkeiten bieten.

2.4. Iterationsverfahren

Man kann auch versuchen, eine der Iterationsmethoden zur Lösung linearer Gleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten zu benutzen, z. B. das GAUSS-SEIDEL-Verfahren

$$x_{\mu} = \frac{b_{\mu}}{a_{\mu\mu}} - \sum_{\nu=1}^n \frac{a_{\mu\nu}}{a_{\mu\mu}} x_{\nu}, \quad \mu = 1, 2, \dots, n$$

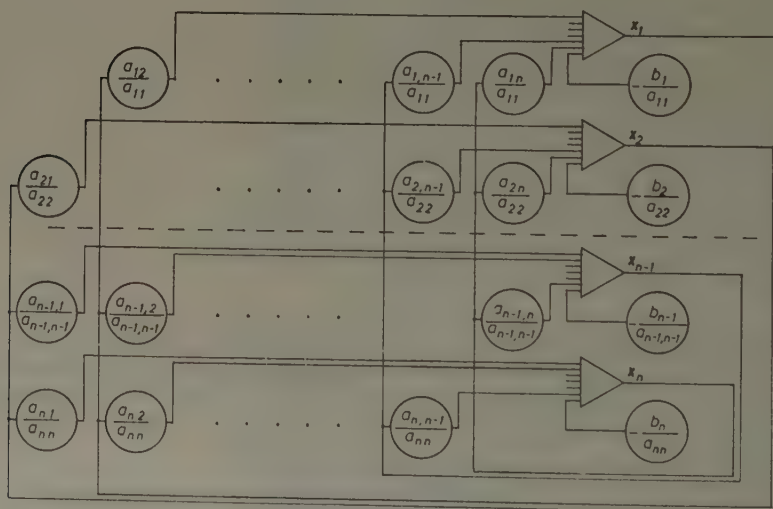


Bild 15

das zu folgendem Programm führt (Bild 15) und sich wegen der einfach durchzuführenden Rückkopplung beim Analogrechner anbietet. Es liefert praktisch sofort die Lösung. Man kann aber hier auch unangenehme Überraschungen erleben, die in der Elektronik des Gerätes, vor allem der Verstärker, liegen. Wegen der unregelmäßigen kleinen Abweichungen dieser Elemente wirkt die Schaltung als Schwingkreis, der völlig ohne Dämpfung ist und daher zu Schwingungen führen kann, die nichts mit der gesuchten Lösung zu tun haben.

Dieselben Erscheinungen treten auch bei anderen, den Iterationsverfahren der praktischen Mathematik nachgebildeten Schaltungen auf, und man kann heute noch nicht allgemein sagen, wann etwa die „iterative“ Schaltung für

$$x = f(x)$$

auf dem Analogrechner die gesuchte Lösung liefert und wann nicht. So führt z. B. die Berechnung der $(n + 1)$ -ten Wurzel mit der Schaltung für

$$x = \frac{n-1}{n} x + \frac{a}{n x^n}$$

für $n = 2$ sofort zu einem Wert der Quadratwurzel, der sogar genauer ist als der von der üblichen Wurzelschaltung gelieferte; auch für größere n ergeben sich für nicht zu kleine Werte von a brauchbare Werte der $(n + 1)$ -ten Wurzel. Dagegen kommt man bei der Lösung der Gleichung

$$x = e^{-x}$$

mit einer analogen „Iterationsschaltung“ nicht zum Ziel.

Nun liegen diese Iterationsverfahren ziemlich am Rande, doch die Eigenschaft des elektronischen Analogrechners, solche Resultate sofort nach Einschalten der Anlage zu liefern, scheint mir einer Weiterverfolgung dieser Methoden wert zu sein.

2.5. Algebraische Gleichungen

Sehr gute Dienste leistet der Analogrechner bei der Lösung algebraischer Gleichungen.

Wir wollen von dem einfachen Fall der Bestimmung reeller Wurzeln bei Gleichungen mit reellen Koeffizienten absehen und gleich auf die Berechnung der reellen und komplexen Wurzeln eines Polynoms mit komplexen Koeffizienten eingehen. Die Verwendung des Analogrechners beruht hier auf einem Satz der konformen Abbildung. Dieser besagt, daß bei der konformen Abbildung $w = f(z)$ durch eine analytische Funktion z. B. ein Kreis um $z = 0$ in eine geschlossene Kurve (C) der w -Ebene übergeht, die den Punkt $w = 0$ so oft umläuft, als Nullstellen von $f(z)$ in dem vorgegebenen Kreise der z -Ebene enthalten sind. Liegen Nullstellen auf dem Rande dieses Kreises, so geht die Bildkurve durch $w = 0$, und zwar so oft als die Zahl der Nullstellen auf dem Kreise beträgt. Man kann damit

1. sofort die Anzahl der Nullstellen von $f(z)$ in $|z| < r$ angeben,
2. indem man den Kreisradius solange ändert, bis in der w -Ebene ein Nulldurchgang erfolgt, nacheinander die Beträge der Nullstellen und
3. aus dem gleichzeitigen Verschwinden von Real- und Imaginärteil auch die zu jedem Betrag gehörigen Winkel ermitteln.

Man bildet zu diesem Zweck $z = r e^{i\varphi}$ mittels $f(z) = u(z(\varphi)) + i v(z(\varphi))$ auf die w -Ebene ab. Das 5. Beispiel zeigt die Anwendung dieses Verfahrens in den einzelnen Schritten auf die Berechnung der Nullstellen des Polynoms 4. Grades

$$w = P(z) = z^4 - (0,100 + 0,400 i) z^3 + (0,520 - 0,120 i) z^2 - (0,064 + 0,256 i) z - (0,077 + 0,077 i).$$

Wir setzen

$$z = r e^{i\varphi}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

wobei der Winkel φ durch die Echtzeit dargestellt wird. Das ergibt

$$\begin{aligned} w = P(z) &= \operatorname{Re} w(r; \varphi) + i \operatorname{Im} w(r; \varphi) \\ &= -0,077 - 0,064 r \cos \varphi + 0,520 r^2 \cos 2\varphi - 0,100 r^3 \cos 3\varphi + r^4 \cos 4\varphi \\ &\quad + 0,256 r \sin \varphi + 0,120 r^2 \sin 2\varphi + 0,400 r^3 \sin 3\varphi \\ &\quad + i (-0,077 - 0,256 r \cos \varphi - 0,120 r^2 \cos 2\varphi - 0,400 r^3 \cos 3\varphi \\ &\quad - 0,064 r \sin \varphi + 0,520 r^2 \sin 2\varphi - 0,100 r^3 \sin 3\varphi + r^4 \sin 4\varphi). \end{aligned}$$

Real- und Imaginärteil werden als Funktionen von φ mit der in Bild 16 angegebenen Schaltung erzeugt.

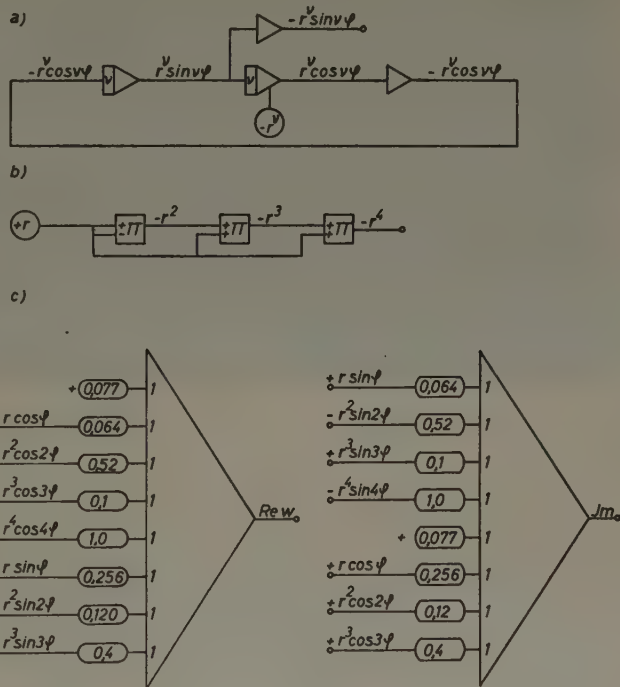


Bild 16

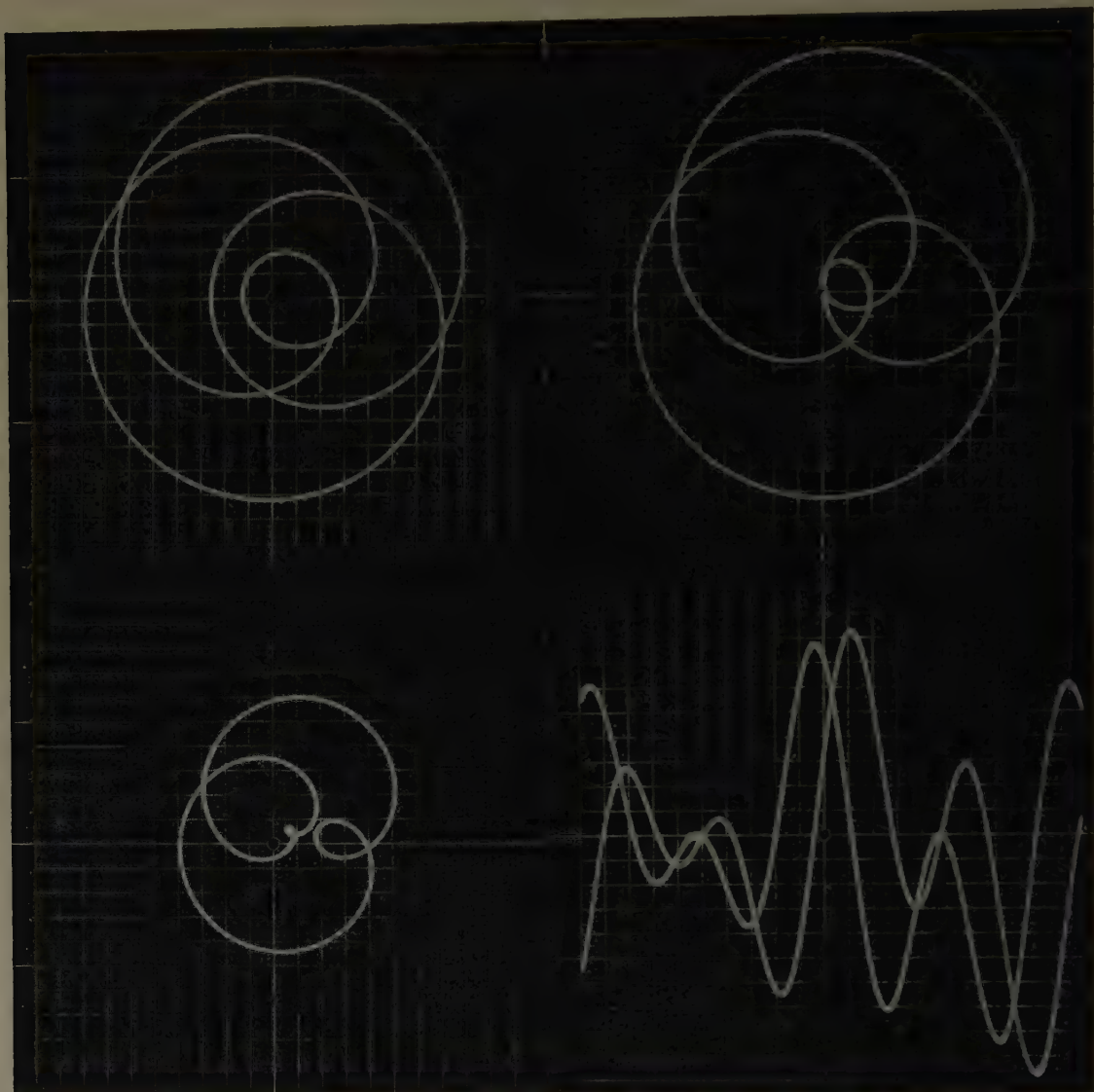


Bild 17

Wählen wir den Radius r hinreichend groß, so zeigt sich (siehe ersten Teil von Bild 17) auf dem Meßbildschirm eine geschlossene, den Nullpunkt der w -Ebene viermal umlaufende Kurve, d. h. in $|z| < r$ liegen genau 4 Nullstellen des Polynoms. Im nächsten Teil ist r so weit verkleinert, $|z| = r_1$, bis zum erstenmal die Bildkurve durch $w = 0$ geht. Wir haben hier 2 Durchgänge, also 2 Wurzeln auf $|z| = r_1$. Für diesen Fall sind auch Real- und Imaginärteil aufgezeichnet, so daß man aus dem gemeinsamen Verschwinden dieser Größen unmittelbar die zugehörigen Winkel der Nullstellen entnehmen kann. Zudem wird der Nullpunkt noch zweimal umlaufen, so daß im Innern von $|z| = r_1$ noch zwei Nullstellen liegen. Bei dem nächst kleineren Wert $|z| = r_2$ liegen noch zwei Nullstellen im Innern. Bei weiterer Verkleinerung kommen wir dann auf den Kreis $|z| = r_3$ (Bild 18), der eine Nullstelle auf dem Rand und eine im Innern enthält. Bei wiederholter Verkleinerung erhält man noch eine Nullstelle im Innern, sodann eine auf dem Rande, schließlich keine Nullstelle mehr im zugehörigen Kreis $|z| \leq r$.

In Tabelle 2 sind die exakten Werte sowie die mit dem Telefunkenrechner des Instituts für Angewandte Mathematik der Technischen Hochschule München ermittelten Werte von Betrag und Winkel der Nullstellen einander gegenübergestellt.

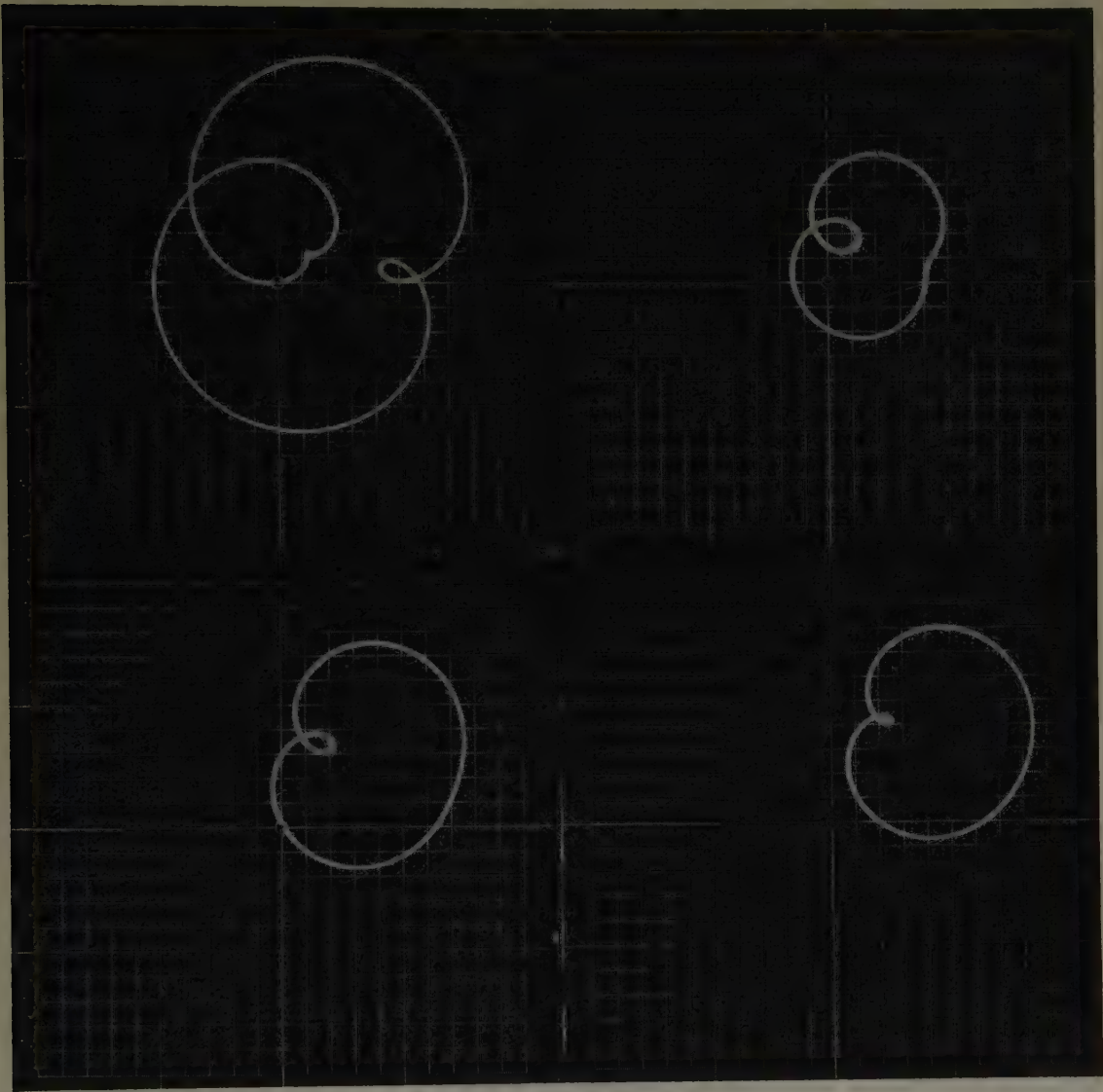


Bild 18

Tabelle 2

Nullstelle	exakter Wert	Meßwert
$z_1 = -0,3$	$r_1 = 0,3$ $\varphi_1 = \pi$	$r_1 = 0,301$ $\varphi_1 = 1,005 \pi$
$z_2 = 0,4 + 0,4 i$	$r_2 = 0,566$ $\varphi_2 = \frac{\pi}{4} = 0,25 \pi$	$r_2 = 0,568$ $\varphi_2 = 0,252 \pi$
$z_3 = 0,8 i$	$r_3 = 0,8$ $\varphi_3 = \frac{\pi}{2} = 0,5 \pi$	$r_3 = 0,799$ $\varphi_3 = 0,498 \pi$
$z_4 = -0,8 i$	$r_4 = 0,8$ $\varphi_4 = \frac{3 \pi}{2} = 1,5 \pi$	$r_4 = 0,799$ $\varphi_4 = 1,496 \pi$

2.6. Konforme Abbildung

Wir haben hier ein spezielles Problem der konformen Abbildung mit dem Analogrechner behandelt, nämlich die Abbildung durch ein Polynom. Man kann aber eine sehr große Klasse von konformen Abbildungen mit dem Analogrechner erhalten. Dazu veranlassen einen die bequemen Ausgabemöglichkeiten mittels Meßbildröhren. Einen Bildschirm wählt man als z -, einen anderen als w -Ebene und kann, wie ich schon auf der letzten GAMM-Tagung ausgeführt habe [6], Abbildungen der Art $w = f(z)$, wobei $f(z)$ entweder durch die Grundrechenoperationen im Analogrechner explizit reproduzierbar ist oder als Lösung einer komplexen Differentialgleichung m -ter Ordnung mit den zugehörigen Anfangsbedingungen implizit definiert ist, mit dem elektronischen Analogrechner erhalten. Wir brauchen also die analytische Funktion gar nicht explizit zu kennen, sondern nur ihre Differentialgleichung und ihre Anfangswerte [7]. Da ich hierüber bereits auf der letzten GAMM-Tagung in Hannover vorgetragen habe, kann

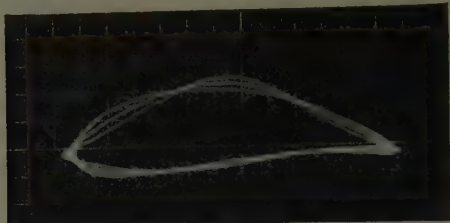


Bild 19



Bild 20

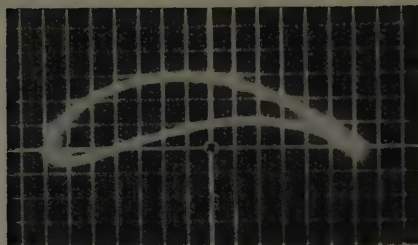


Bild 21

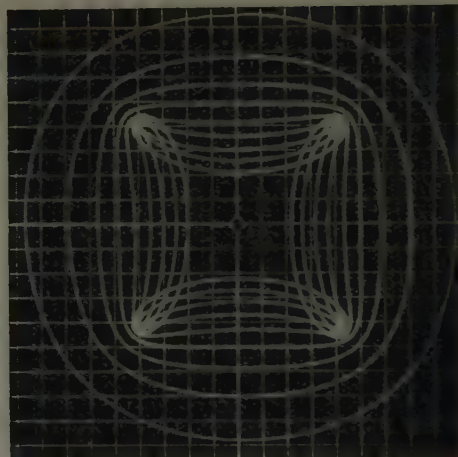


Bild 22

ich mich hier kurz fassen und möchte nur zwei einfache typische Beispiele bringen, einmal die verallgemeinerte JOUKOWSKI-Abbildung

$$w = az + \frac{b}{z} + \frac{c}{z^2} + \frac{d}{z^3}.$$

Das zugehörige Programm erfordert bereits die beachtliche Anzahl von 12 Multiplikatoren. Wir sehen davon ab, das umfangreiche Programm hier ausführlich wiederzugeben, und bringen in den nächsten Bildern (Bilder 19–21) lediglich die mit unserem Telefunkengerät erhaltenen Abbildungen des bei der JOUKOWSKI-Abbildung verwendeten Kreises für verschiedene Werte der obigen Abbildungsfunktion. Daß die Bildkurven nicht schön glatt sind, soll uns hier nicht stören, denn unsere Anlage ist nun bald drei Jahre alt und verwendet daher noch ausschließlich die seinerzeit nur vorhandenen Quadratmultiplikatoren. (Bei der raschen technischen Entwicklung auf dem Gebiete der Rechenanlagen ist eine Anlage, die im Zeitpunkt der Bestellung dem modernsten Stand entspricht, im Zeitpunkt ihrer Lieferung und vielmehr noch einige Jahre später bereits von noch leistungsfähigeren Geräten übertroffen.) Mit den neuen genaueren Time-Division-Multiplikatoren würden wir hier schöne glatte Kurven erhalten.

Als nächstes Beispiel sei die Abbildung konzentrischer Kreise um den Nullpunkt durch die BESSELFunktion $J_{-1/2}(z)$ gezeigt (Bild 22). Im Prinzip könnten wir — eine hinreichende Kapazität des Rechners vorausgesetzt — statt der BESSELSchen Differentialgleichung irgendeine andere Differentialgleichung m -ter Ordnung im Komplexen verwenden.

An diesem Beispiel anschließend möchte ich noch auf eine weitere Anwendungsmöglichkeit des elektronischen Analogrechners für die Funktionentheorie hinweisen. Er kann uns dazu dienen, unmittelbar die Betragsflächen analytischer Funktionen, die explizit oder

implizit durch eine Differentialgleichung gegeben sind, zu ermitteln. Zu diesem Zweck bestimmen wir für einen gewissen Zweig der Umkehrfunktion die zugehörige Differentialgleichung und ermitteln die Abbildung des Polarkoordinatennetzes. Damit haben wir die Betragsfläche durch ihre Niveau- und Falllinien dargestellt. So kann in diesem Beispiel das Kurvennetz (in Bild 22) als Netz der Niveaulinien eines gewissen Zweiges der Umkehrfunktion der betrachteten BESSELschen Funktion gedeutet werden.

Wir stehen mit unseren Untersuchungen erst am Anfang. Die bisher mit meinen Mitarbeitern erzielten Ergebnisse zeigen jedoch, daß sich hier ein neues Anwendungsgebiet des elektronischen Analogrechners auf die Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen erschließt.

Die Konformität der Abbildung ist keineswegs eine notwendige Voraussetzung für die Verwendbarkeit des Analogrechners. Man kann ebenso, ja vielleicht noch viel bequemer, Abbildungen allgemeinerer Art zweier Ebenen aufeinander damit behandeln. Diese Anwendungsmöglichkeit des Analogrechners ist, soweit ich das übersehen kann, bisher noch völlig ungenutzt.

2.7. Linear Programming

Ein weiteres, wie mir scheint sehr aussichtsreiches Anwendungsgebiet des elektronischen Analogrechners ist der durch „Linear Programming“ gekennzeichnete Problemkreis der Unter-

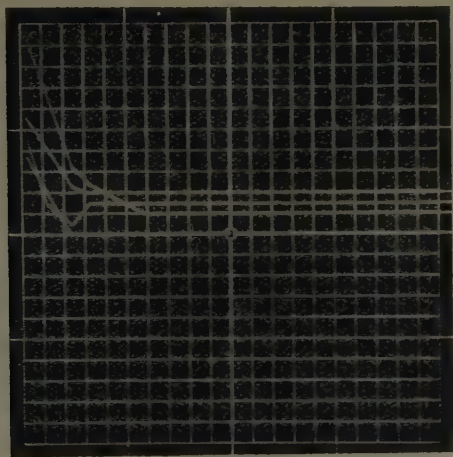


Bild 23

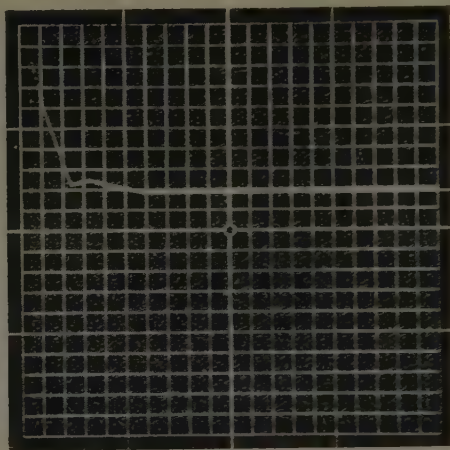


Bild 24

nehmensforschung. Nun ist bei umfangreichen Problemen dieser Art zweifellos der Digitalrechner hierfür das geeignete Rechenhilfsmittel. Trotzdem kann der Analogrechner hier bei gewissen Fragestellungen, z. B. bei der Untersuchung des Einflusses gewisser Koeffizienten der Bedingungsgleichungen oder der Zielfunktion auf das Resultat, ein wertvolles Hilfsmittel sein. Die Behandlung des Linear Programming auf dem Analogrechner erfolgt durch die Zurückführung der Aufgabe auf Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen für die Einflußgrößen, also auf die Bewegung des durch die Einflußgrößen bestimmten Punktes im n -dimensionalen Raum, die so gewählt wird, daß sie im Innern des zulässigen Bereiches in Richtung des Gradienten der Kostenfunktion erfolgt, daß aber jedesmal, wenn eine der einschränkenden Bedingungen verletzt wird, ein anderes Differentialgleichungssystem in Aktion tritt, nach dem nunmehr die Bewegung erfolgt. Entscheidend dafür ist, daß uns auf dem Analogrechner der bedingte Sprung zur Verfügung steht. Man kann damit erreichen, daß diese Bewegung des Einflußpunktes, gleichgültig von welchem Punkt des n -dimensionalen Raumes wir starten, zwangsläufig und in kurzer Zeit in eine optimale Lage führt, in der die Zielfunktion ihr (absolutes) Extremum annimmt.

Das Funktionieren dieses Verfahrens sei hier lediglich an einem einfachen Musterbeispiel vorgeführt (Bilder 23 und 24). Die Zielfunktion ist hier eine Funktion von 4 Veränderlichen

$$K = 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4.$$

Die einschränkenden Ungleichungen seien

$$2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - 1 \leq 0; \quad x_1 - 0,15 \geq 0; \quad x_2 - 0,2 \geq 0; \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 - 0,1 \geq 0.$$

Gesucht sei das Minimum von K . Ausgehend von einer gewissen Anfangslage ergeben sich in Bild 23 nach kurzer Rechenzeit die Koordinaten der optimalen Lage und in Bild 24 der zugehörige Verlauf der Kostenfunktion gegen ihr Minimum.

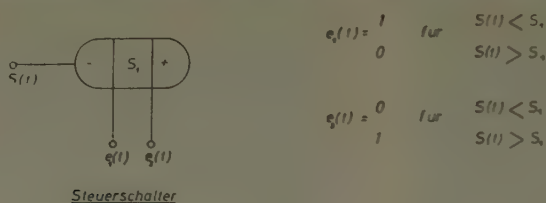
Bei der engen Verbindung von Linear Programming und Spieltheorie ergeben sich damit auch Anwendungsmöglichkeiten des Analogrechners auf die Spieltheorie. Doch sind wir bisher bei der Fülle der Probleme noch nicht dazu gekommen, das weiter zu verfolgen. Das skizzierte Verfahren läßt sich jedoch nach unseren bisherigen Untersuchungen auch auf den Fall nichtlinearer Bedingungen und einer nichtlinearen Zielfunktion, sowie auf zeitabhängige Koeffizienten beim Linear Programming übertragen. Das scheint mir im Hinblick auf die Anwendungen besonders wichtig zu sein, denn in der Praxis sind die Koeffizienten vielfach nicht konstant.

2.8. Programmverzweigungen

Das entscheidende Element für die Anwendung des Analogrechners auf den eben skizzierten Problemkreis ist die Sprungfunktion.

$$f(x) = \begin{cases} -a \\ b \end{cases} \quad \text{für} \quad \begin{cases} -1 \leq x < 0 \\ 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Hiermit lassen sich unter Verwendung der üblichen Rechenelemente (Integrator, Summierer, Multiplikator) Schaltungen aufbauen, die dieselbe Wirkung haben wie elektrische von gewissen Steuergrößen gesteuerte Schalter. Der „Steuerschalter“ (Bild 25) liefert, falls eine gewisse



Steuerweiche

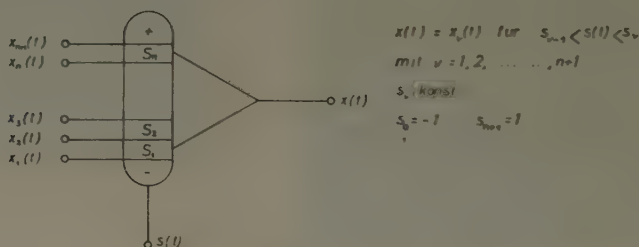


Bild 25

im Rechner erzeugte Steuergröße $s(t)$ die Bedingung $s(t) < s_1$ erfüllt, an zwei Ausgängen die Größen $e_1 = 1$ und $e_2 = 0$, und, falls $s(t) > s_1$ ist, $e_1 = 0$, $e_2 = 1$. Aus diesen Steuerschaltern lassen sich allgemeinere Steuerelemente, die wir „Steuerweichen“ genannt haben, gewinnen, die, für den Fall, daß die Steuergröße im Intervall $s_{v-1} < s(t) < s_v$ mit $s_0 = -1$, $s_{n+1} = 1$, $v = 1, 2, \dots, n+1$ liegt, an den Ausgängen in der Maschine erzeugte Funktionen $x_v(t)$ ausliefert. Damit kann man u. a. mehrfache Verzweigungen des Rechenablaufs bewirken. Hinsichtlich Realisierung und Anwendungen sei auf eine im nächsten MTW-Heft erscheinende Note meiner Mitarbeiter GAEDE und MANNSHARDT [8] verwiesen.

Vom Standpunkt des Mathematikers aus muß man, um zu befriedigenden Ergebnissen zu kommen, noch wesentlich höhere Anforderungen an die Realisierung der Sprungfunktion stellen als bisher. Es treten nämlich sonst hier ähnliche Erscheinungen auf wie bei den skizzierten Iterationsschaltungen, die ihren Grund offenbar in den physikalischen Eigenschaften der verwendeten Schaltelemente haben. In den modernsten Geräten stehen sog. Komparatoren zur Verfügung, die im Grunde Steuerschalter in unserem Sinne sind, wobei als Steuerfunktion die Differenz zweier eingegebener Funktionen dient.

2.9. Weitere Anwendungsmöglichkeiten

Als ein dankbares Anwendungsgebiet des elektronischen Analogrechners erweist sich auch die Annäherung einer vorgegebenen Funktion durch Funktionen einer gewissen Klasse von Funktionen, z. B. Kreisfunktionen, BESSELFunktionen, oder die für statistische Untersuchungen wichtige GAUSSanalyse, also die Entwicklung nach Normalverteilungsdichten. Als Fehlermaß für die Güte der Approximation berechnet man auf dem Analogrechner das

Quadratmittel der Abweichung. Dieses nicht negative Fehlermaß hängt nur noch von den Parametern ab, und man kann durch ein Trial-and-Error-Verfahren oder ein dem Gradientenabstiegsverfahren entsprechendes Verfahren das Fehlermaß sukzessive verkleinern. Für gewisse Approximationen bietet sich hier auch eine Filtermethode, wie sie in der Elektrotechnik Verwendung findet, an.

Auch die Behandlung gewisser Rand- und Eigenwertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen kann auf dem Analogrechner mit einem Trial-and-Error-Verfahren durchgeführt werden. Bisher sind in dieser Hinsicht nur Einzelfälle behandelt worden, und es bleibt in Richtung systematischer Methoden für die wichtigsten Randwertaufgaben für den Mathematiker noch manches zu leisten.

Für die Lösung von Integralgleichungen auf dem Analogrechner ist ebenfalls noch vieles zu erledigen. Bisher hat man hierzu besondere schnell abzutastende Speicher herangezogen. Man kann jedoch auch versuchen, diese Aufgabe auf die Lösung von Differentialgleichungen zum mindesten näherungsweise zurückzuführen. Ich hoffe, zu gegebener Zeit über die von uns in Angriff genommenen Arbeiten berichten zu können.

Eng damit zusammen hängt auch das Gebiet der Integraltransformationen. Für gewisse Transformationen, wie die FOURIERTRANSFORMATION, kann man ein Differenzenverfahren verwenden, doch muß ich auch hier auf einen späteren Bericht verweisen.

Auch auf die Möglichkeit, mit Hilfe des Analogrechners die Zeitverschiebung wenigstens angenähert zu reproduzieren, also aus einer im Analogrechner erzeugten Funktion $f(t)$ die Funktion $f(t - k)$ bei vorgegebenem k zu erzeugen, sei hingewiesen. Hierfür sind einige Näherungsverfahren, die das Problem auf die Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen zurückführen, angegeben worden. Diese Verfahren sind jedoch sehr aufwendig und zudem, wie unsere Untersuchungen zeigen, nicht sehr befriedigend. Neuerdings stehen hierfür besondere elektronische Zeitverschieber zur Verfügung. Wir hoffen, daß wir mit diesem Zusatzgerät, das soeben in unsere Münchener Maschine eingebaut wird, bessere Ergebnisse erhalten und damit auch Differenzengleichungen und Differenzen-Differentialgleichungen behandeln können.

Schließlich sei noch auf die Möglichkeit hingewiesen, den elektronischen Analogrechner für die Untersuchungen stochastischer Prozesse heranzuziehen. Hierüber hat SPACEK vor zwei Jahren auf einer Sitzung unseres GAMM-Fachausschusses Statistik berichtet. Diese Arbeiten sind jedoch noch nicht veröffentlicht. Die zugänglichen Arbeiten beziehen sich auf die Berechnung gewisser Erwartungswerte bei stationären Prozessen 2. Ordnung mit rationalem Spektrum.

Ein weites Feld, das allein einen umfangreichen Bericht füllen würde, ist das Problem der bei den verschiedenen Verfahren auf dem Analogrechner erzielbaren Genauigkeiten. Es existiert eine reichhaltige Literatur über Genauigkeitsfragen bei elektronischen Analogrechnern, die vor allem vom Standpunkt des Ingenieurs behandelt werden. Hinsichtlich der Genauigkeit der mathematischen Verfahren bleibt für den Mathematiker noch viel zu erledigen. Dabei scheinen mir auch statistische Methoden aussichtsreich zu sein, liefert doch der für mathematische Untersuchungen vor allem zuständige repetierende Rechner die Möglichkeit, durch Wiederholung der Rechnung in kurzer Zeit eine große Zahl von Resultaten zu erhalten. Es stellt sich dann die Frage, inwieweit man aus dem Beobachtungsmaterial sichere Schlüsse ziehen kann, z. B. inwieweit eine gewisse Vermutung noch als übereinstimmend mit dem Beobachtungsmaterial angesehen werden kann.

3. Der digitale Analogrechner

Ich habe eingangs erwähnt, daß die Darstellung der Rechengrößen durch physikalische Größen heute keineswegs mehr als typisch für den Analogrechner bezeichnet werden kann, und möchte daher zur Erhärtung dieser Behauptung zum Abschluß noch auf eine neue Art von Analogrechner hinweisen, den sog. digitalen Analogrechner.

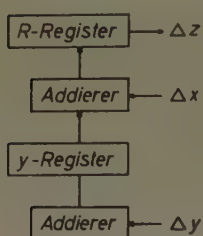
Im digitalen Analogrechner werden die Rechengrößen digital dargestellt. Er arbeitet aber nach dem Baukastenprinzip und besitzt das für den Analogrechner typische Rechenelement, den Integrator. Die Integration wird dabei durch eine einfache numerische Quadratur, die Rechtecksregel oder die Trapezregel, erzeugt. Hierfür sind feste Speicherplätze (z. B. auf einer Trommel) vorgesehen. Die Einfachheit dieses Prinzips gestattet es, sehr viele Integratoren bereitzustellen. Dabei kann als Integrationsveränderliche jede beliebige Veränderliche Verwendung finden, so wie das früher in dem Differential-Analyzer von BUSH und den in Anlehnung hieran entwickelten mechanischen Analogrechnern der Fall war. Damit läßt sich dann auch wieder die Multiplikation auf der Grundlage der partiellen Integration realisieren, so daß die zunächst für die Multiplikation auf dem elektronischen Analogrechner vorhandenen Schwierigkeiten hier nicht vorliegen. Zur Vorbereitung des Programms für eine Differential-

gleichung wird diese in eine Gleichung von Differentialen umgeformt und diese mit Hilfe der Rechenelemente nachgebildet. Dabei werden die Differentiale durch Differenzen ersetzt, deren Größe verschieden, je nach der zu erzielenden Genauigkeit, gewählt werden kann.

Die einfachste Form eines Integrators (nach der Rechtecksregel) erfordert, wie in Bild 26 skizziert, zwei Addierer und zwei Register. Im ersten Addierer werden die Differenzen der zu integrierenden Größe summiert und gelangen ins erste Register. Der Inhalt dieses Registers wird sodann mit dem Δx der Integrationsveränderlichen multipliziert und gelangt als $\Delta z = y \Delta x$ ins nächste Register, das somit angenähert die Differenz des Integrals ausliefert. Diese Differenzen können bei Bedarf in einem weiteren Summierer akkumuliert oder ihrerseits wieder als Differenzen einer Integrationsveränderlichen einem weiteren Integrator zugeführt werden.

Integrator:

Arbeitsweise:



$$\Delta z = y \Delta x$$

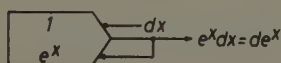
$$z = \int y_0 \Delta x_0 = \int y dx$$

Symbol:



Erzeugung spezieller Funktionen

Exponentialfunktion:



Kreisfunktionen:

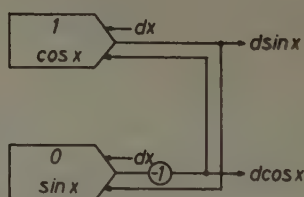


Bild 26

sec.), daß der Rechner praktisch mit der Geschwindigkeit des elektronischen Analogrechners rechnet, wenn man sich etwa auf die gleiche Rechengenauigkeit beschränkt. Höhere Genauigkeiten können durch eine entsprechende Verlängerung der Rechenzeit erzielt werden. Man hat daher die Möglichkeit, ein Problem zunächst rasch mit einer geringeren Genauigkeit und bei Bedarf mit einer großen Genauigkeit zu behandeln, wenn man nur die Rechenzeit entsprechend verlängert, eine für den Mathematiker sehr wertvolle Eigenschaft. Die Schaltung der Rechenelemente erfolgt wie beim elektronischen Analogrechner durch unmittelbare Verbindung der Rechenelemente auf einem Steckbrett.

4. Schlußbemerkung

Ich habe versucht, in einem kurzen Überblick den elektronischen Analogrechner und seine Anwendungsmöglichkeiten vom Standpunkt des Mathematikers zu behandeln. Der Analogrechner in seiner heutigen Gestalt bietet dem Mathematiker zu den bisher üblichen Ingenieur Anwendungen noch eine Reihe bisher noch nicht oder wenig benutzter Möglichkeiten, die ihrerseits Rückwirkungen auf die mathematischen Verfahren, auf neu zu entwickelnde Methoden haben und zu bisher unbearbeiteten Fragestellungen Anlaß geben.

Ich sage, der Analogrechner in seiner heutigen Gestalt, denn die ungeheuer rasche Entwicklung auf dem technisch-physikalischen Sektor bringt uns von Jahr zu Jahr neue, schneller

An solchen digitalen Analogrechnern sind uns bisher drei bekannt geworden:

1. Der sog. CRC 105 Dezimal Digital Differential Analyzer der Computer Research Corporation of California, dessen Produktion jedoch inzwischen wieder eingestellt wurde,

2. ferner das DA-1 Zusatzgerät zum G-15 D Computer der Bendix-Aviation Corporation, Los Angeles. Dieses Zusatzgerät ermöglicht es, den kleinen Bendix-Computer als Digitalen Analogrechner zu verwenden. Die Verbindung der einzelnen Rechenelemente geschieht hier allerdings mit Hilfe eines Rechenprogramms, das mit den anderen Daten der Rechnung in den Speicher des Rechners eingegeben werden muß. Damit geht natürlich ein wesentlicher Vorteil der Analogrechner, die einfache Programmierung, weitgehend verloren.

3. Ein ausgesprochener Analogrechner auf digitaler Basis ist der TRICE Computer der Packard Bell Computer Corporation, Los Angeles. Dieser volltransistorisierte Rechner arbeitet parallel mit einer Wortlänge von 30 bits. Jedes Rechenelement hat einen eigenen Speicher (delay line). Die Rechengeschwindigkeit ist so groß (Addition 0,67 Mikro-

und exakter arbeitende Geräte. War es zunächst die Elektronenröhre, welche das Zeitalter der Großrechenanlagen einleitete, so setzt sich heute in den modernen digitalen und Analog-Geräten mehr und mehr der Transistor durch, der eine weitere Steigerung der Kapazität und Zuverlässigkeit der Rechenanlagen ermöglichte. Glaubte man noch bis vor kurzem, daß dem Bau noch schnellerer und leistungsfähigerer Rechner durch die Eigenschaften dieser Bauelemente eine kaum zu steigernde Grenze gesetzt sei, so scheint sich nunmehr durch die Entwicklung eines neuen auf der Supraleitung ferromagnetischer Stoffe beruhenden elektronischen Schaltelementes, des Kryotrons, eine neue umwälzende Entwicklung auf dem Gebiete der Rechenautomaten abzuzeichnen.

Ich glaube, wir sind trotz mancher bedrückender Zeitumstände doch unter einem glücklichen Stern geboren, daß wir als Mathematiker an diesen Entwicklungen persönlichen Anteil haben können.

Literatur

- [1] H. HERRMANN, Beiträge zur Programmiertechnik für elektronische Analogie-Rechenmaschinen, Abhandlg. d. Braunsch. Wissensch. Gesellschaft X (1958), S. 117—149.
- [2] R. HERSHEL, Zum Entwurf von Analogrechartsaltungen für regelungstechnische Probleme, Beiheft zur Regelungstechnik, München 1958, S. 54—66.
- [3] K. KUNTZE, Zur Verfahrenstechnik für die Lösung von Schwingungsproblemen mittels eines elektronischen Analogrechners, erscheint in AICA.
- [4] R. ALBRECHT, Approximation to the Solution of Partial Differential-Equations by the Solutions of Ordinary Differential-Equations, Numerische Mathematik 2 (1960).
- [5] H. H. SEYFERTH, Über die Behandlung partieller Differentialgleichungen auf dem elektronischen Analogrechner, Elektronische Rechenanlagen 2 (1960), S. 85—92.
- [6] J. HEINHOLD, Konforme Abbildung mittels elektronischer Analogrechner, ZAMM 39 (1959), S. 369—370.
- [7] J. HEINHOLD, Konforme Abbildung mittels elektronischer Analogrechner, MTW (Zeitschrift für moderne Rechentechnik) (1959), S. 44—48.
- [8] K. W. GAEDE u. R. MANNSHARDT, Verwendungsmöglichkeiten der Sprungfunktionen in Rechenschaltungen für elektronische Analog-Rechenmaschinen, erscheint in MTW.

Anschrift: Prof. Dr. J. HEINHOLD, München-Solln, Irmgardstr. 15

Die quasi-logarithmischen Eigenschaften des Restklassensystems

VON WALTER HOFFMANN und HELMUT E. MÜLLER *)

In den heute gebauten Rechenautomaten werden die zu berechnenden Zahlen üblicherweise in einem polyadischen Zahlensystem dargestellt (binäre, dezimale oder gemischt-polyadische Kodierung). Eine grundsätzlich andere Darstellung der Zahlen im sogenannten „Restklassensystem“ hat M. VALACH, Prag, bereits 1951 vorgeschlagen. Es ist das Verdienst von A. SVOBODA, Prag, das Restklassensystem auf seine Eignung zur Zahlendarstellung in Rechenautomaten untersucht und Wege zur Lösung verschiedener, einer nutzbringenden Anwendung sich entgegensetzender Probleme gefunden zu haben [1 bis 8].

Das Zahlensystem der Restklassen baut auf den Eigenschaften der linearen Kongruenzen auf. Um eine Zahl X im Restklassensystem darzustellen, legt man eine Mannigfaltigkeit von n Modulzahlen p_i , die als paarweise prim vorausgesetzt seien, zu Grunde und schreibt für die Zahl X die n Kongruenzen

$$X \equiv x_i \pmod{p_i}; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \dots \dots \dots (1).$$

Die Zahl X ist dann eindeutig darstellbar, wenn sie kleiner ist als die Periode P des Restklassensystems, die als das Produkt der zu Grunde gelegten Modulzahlen p_i definiert ist. Der Zahlenbereich eindeutiger Darstellbarkeit für X ist somit bestimmt durch:

$$0 \leq X < P = \prod p_i; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \dots \dots \dots (2).$$

Wie die Eindeutigkeit der Darstellbarkeit des Ergebnisses einer auszuführenden Rechenoperation auch bei allfälligem Überschreiten des oben definierten Zahlenbereichs gewährleistet werden kann, stellt z. B. eines der Probleme der Restklassenarithmetik dar. SVOBODA hat gezeigt, wie dieses Problem durch Erweiterung der Periode (extension of the base) gelöst werden kann.

Auf Grund der aus der Zahlentheorie bekannten Gesetze für das Rechnen mit linearen Kongruenzen führt man die Addition, die Subtraktion und die Multiplikation zweier im Restklassensystem dargestellter Zahlen durch Addition, Subtraktion bzw. Multiplikation $\pmod{p_i}$ ihrer entsprechenden Residuen für jede Modulzahl unabhängig voneinander durch.

*) IBM Forschungslaboratorium Adliswil-Zürich, Schweiz.

Beispiel einer Multiplikation im Restklassensystem:

Modulzahlen	p_i	3	5	7	11	13
Faktor $X = 139$;	x_i	1	4	6	7	9
Faktor $Y = 107$;	y_i	2	2	2	8	3
Produkt $Z = X \cdot Y = 14873$;	z_i	2	3	5	1	1

Die Lösung der Kongruenz

$$ax \equiv b \pmod{p}; \quad a \neq 0, \quad p \text{ Primzahl} \dots \dots \dots (3)$$

wird als Formaldivision bezeichnet. Dementsprechend heißt der als ganze Zahl erhaltene Wert

$$x \equiv \frac{b}{a} \pmod{p} \dots \dots \dots (4)$$

Formalquotient zum Unterschied vom numerischen Quotienten $\frac{b}{a}$, der nur dann ganzzahlig ist, wenn der Dividend ein Vielfaches des Divisors ist. Unter dieser Voraussetzung sind Formalquotient und numerischer Quotient identisch.

Neben des aus obigem Multiplikationsbeispiel ersichtlichen Vorzuges der Übertragsfreiheit der Restklassenarithmetik verdienen insbesondere die auf dem Indexkalkül beruhenden quasi-logarithmischen Eigenschaften des Restklassensystems die Aufmerksamkeit des mit der Systemplanung von Rechenautomaten befaßten Mathematikers bzw. Ingenieurs.

Die Indizes wurden von LEONHARD EULER im Jahre 1772 angegeben [9] und sind seit jener Zeit in der Zahlentheorie bekannt. Sie werden aus den Potenzserien der primitiven Wurzeln entwickelt. Eine primitive Wurzel g erfüllt folgende Beziehung:

$$g^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}, \quad \text{für Primzahlen } p > 2 \dots \dots \dots (5).$$

Da alle Terme, die sich aus der Potenzserie $g^1, g^2, g^3, \dots, g^{p-1} \pmod{p}$ herleiten, zu p relativ prim und deshalb den Termen eines reduzierten Residuensystems modulo p kongruent sind, so ist jede Zahl a , die durch p nicht teilbar ist, einer Potenz von g kongruent:

$$a \equiv g^v \pmod{p} \dots \dots \dots (6).$$

Der Potenzexponent v der primitiven Wurzel g wird als der Index der Zahl a bezeichnet:

$$v = {}^g\text{ind } a \dots \dots \dots (7).$$

Es sind im folgenden z. B. für die Primzahl $p = 11$ die von ihrer kleinsten primitiven Wurzel $g_1 = 2$ abgeleiteten Indizes in Tabellenform wiedergegeben:

$v \equiv {}^g\text{ind } a$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
a	2	4	8	5	10	9	7	3	6	1	2	4	8 etc.

Bereits im Jahre 1839 hat CARL G. J. JACOBI eine Indextabelle für die Primzahlen bis zu 1000 veröffentlicht [10].

Gemäß einem Theorem der Zahlentheorie ist der Index eines Produktes kongruent der Summe der Indizes der einzelnen Faktoren modulo $(p-1)$, mit p als ungeradzahlig Primzahl:

$$\text{ind}(x_i \cdot y_i) \equiv \text{ind } x_i + \text{ind } y_i \pmod{p_i - 1} \dots \dots \dots (8).$$

Die Beziehung zwischen einer Zahl und ihrem Index ist solcherart ähnlich der Beziehung zwischen einer Zahl und ihrem Logarithmus (cf. GAUSS [11]).

Die Formaldivision wird folgerichtig durch Subtraktion der Indizes nach der Beziehung

$$\text{ind}(z_i : y_i) \equiv \text{ind } z_i - \text{ind } y_i \pmod{p_i - 1}, \quad \text{für } y_i \neq 0 \dots \dots \dots (9)$$

durchgeführt.

Sie kann aber auch auf eine Indexaddition zurückgeführt werden, wenn die Residuen y_i des Divisors zunächst in ihre Reziprokwerte $\frac{1}{y_i}$ übergeführt werden, welche letztere sodann wie Faktoren zu behandeln sind:

$$\text{ind}(z_i : y_i) \equiv \text{ind } z_i + \text{ind}\left(\frac{1}{y_i}\right) \pmod{p_i - 1}, \quad \text{für } y_i \neq 0 \dots \dots \dots (10).$$

Die Gleichungen (8) und (9) bilden die Grundlage für den Entwurf von Restklassen-Rechenschiebern oder -Rechenscheiben für beliebige ungeradzahlige Primzahlen p . Bild 1 zeigt eine Rechenscheibe modulo 11; sie ist in analoger Weise wie ein gebräuchlicher logarithmischer Rechenschieber zu benutzen. Diese Rechenscheibe steht in einer der Multiplikation mit 5 (mod 11) entsprechenden Stellung.

Zwei einfache Symmetrieeigenschaften lassen sich sofort von der Rechenscheibe ablesen: Die Summe zweier an den Enden eines Durchmessers stehender Zahlen ist gleich p . Zahlen, welche in bezug auf den durch ① und $(p-1)$ hindurchgehenden Durchmesser symmetrisch liegen, sind reziprok modulo p .

Da die Anzahl der primitiven Wurzeln modulo p gleich ist $N_p = \varphi(p-1)$, mit φ als EULERscher Funktion, so lassen sich N_p verschiedene Restklassen-Rechenscheiben für eine gegebene Primzahl entwerfen. Beispielsweise gibt es vier verschiedene Rechenscheiben für $p = 11$, entsprechend den vier zugehörigen primitiven Wurzeln $g_1 = 2$, $g_2 = 6$, $g_3 = 7$ und $g_4 = 8$, die — in Analogie zum Logarithmus — die Basis für die Indexrechnung darstellen. Kennt man für eine Primzahl p eine primitive Wurzel g , so lassen sich sämtliche anderen primitiven Wurzeln zu p leicht finden, indem man die zu $(p-1)$ primen Zahlen aufsucht und diese als Exponenten der bekannten primitiven Wurzel setzt. Ausgehend beispielsweise von $g = 2$ für $p = 11$, ermittelt man 1, 3, 7 und 9 als die zu $(p-1) = 10$ primen Zahlen und findet durch Ausrechnen der Kongruenzen

$$2^1 \equiv 2 \pmod{11}, \quad 2^3 \equiv 8 \pmod{11}, \quad 2^7 \equiv 7 \pmod{11}, \quad 2^9 \equiv 6 \pmod{11}$$

alle primitiven Wurzeln für $p = 11$.

Die Umrechnung des Index von einer Zahl a aus einer Indexbasis g in eine andere Indexbasis h läßt sich mittels der Beziehung

$${}^h\text{ind } a \equiv {}^g\text{ind } a \cdot {}^h\text{ind } g \pmod{p-1} \quad (11)$$

durchführen.

Durch Nutzbarmachung der quasi-logarithmischen Eigenschaften der Indizes lassen sich die Multiplikation und die Formaldivision im Restklassensystem mit Hilfe einfacher Modulo $(p-1)$ -Addierwerke durchführen. Wie aus Gleichung (6) sowie aus der Indextabelle zu sehen ist, besteht eine ein-eindeutige Zuordnung zwischen einer Zahl a und ihrem Index v (in dem Zahlenbereich $1 \leq a, v \leq p-1$). Aus diesem Grund läßt sich in einem Restklassenrechenwerk die Überführung der Zahlen in die Indexdarstellung und die Rückführung hieraus durch eine vorbestimmte Leitungsvertauschung an den Eingängen und Ausgängen des Addierwerks durchführen. Dies ist in einem Blockdiagramm für ein Multiplizierwerk modulo 7 (Bild 2) schematisch dargestellt. Für die Zahl 0 ist eine spezielle Leitungsführung mit einem ODER-Gatter vorgesehen.

Man wird zugestehen, daß es schwierig ist, heute abschätzen zu können, wieviele Varianten von mechanischen, elektrischen oder elektronischen Restklassenrechenwerken oder Prüfschaltungen in Rechenautomaten möglich sind, in denen unter Ausnützung der quasi-logarithmischen Eigenschaften des Restklassensystems höhere arithmetische Operationen auf gewöhnliche Moduloadditionen von Indizes zurückgeführt werden.



Bild 1. Rechenscheibe modulo 11 mit der primitiven Wurzel $g = 2$ als Basis

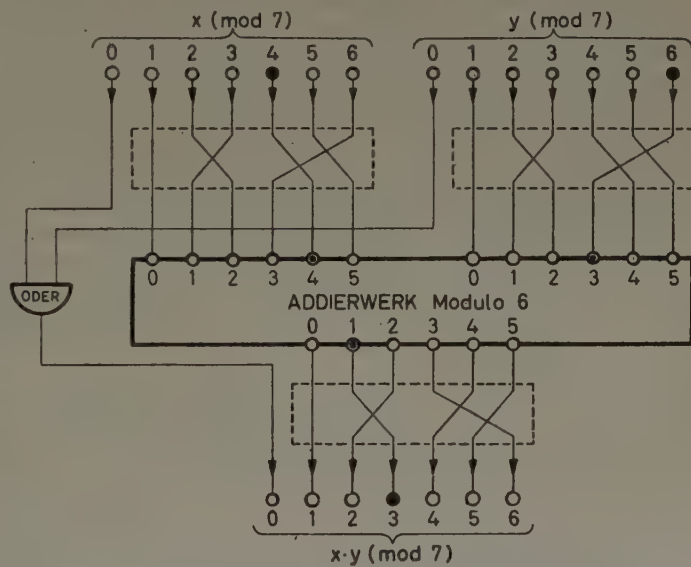


Bild 2. Blockschema eines Multiplizierwerks modulo 7 mit der primitiven Wurzel $g = 3$ als Basis

Beispiel: Ausführung der Multiplikation $4 \cdot 6 \equiv 3 \pmod{7}$ durch Indexaddition: $\text{ind } 4 + \text{ind } 6 \equiv \text{ind } 3 \pmod{6}$

Literatur

- [1] M. VALACH, Vznik kodu a číselné soustavy zbytkových tříd (Ursprung des Kodes und des Zahlensystems der Restklassen). Stroje na Zpracování Informací (Maschinen zur Informationsverarbeitung) 3 (1955), S. 211—245. Herausg.: Verlag der tschechoslowakischen Akademie der Wissenschaften, Prag.
 - [2] A. SVOBODA, M. VALACH, Operátorové obvody (Operationsschaltkreise). Stroje na Zpracování Informací 3 (1955), S. 247—295.
 - [3] M. VALACH, Převod čísel ze soustavy zbytkových tříd do polyadické soustavy změnou měřítka periody (Überführung von Zahlen aus dem System der Restklassen in ein polyadisches System durch Änderung des Periodenmaßstabes). Stroje na Zpracování Informací 4 (1956), S. 53—64.
 - [4] M. VALACH, Abbildung der Zahlen und der arithmetischen Operationen im Restklassensystem. Aktuelle Probleme der Rechentechnik, Internat. Mathematiker-Kolloquium, Dresden, 22. bis 27. November 1955, Berlin 1957, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, S. 57—59.
 - [5] A. SVOBODA, Rational Numerical System of Residual Classes. Stroje na Zpracování Informací 5 (1957), S. 9—37.
 - [6] A. SVOBODA, The Numerical System of Residual Classes in Mathematical Machines, Vortrag, Congreso Internacional de Automatica, Madrid, 13. bis 18. Oktober 1958.
 - [7] A. SVOBODA, The Numerical System of Residual Classes in Mathematical Machines, Proc. Internat. Conf. Information Processing, Paris, 15. bis 20. Juni 1959, München 1960, Verlag R. Oldenbourg, S. 419—422.
 - [8] A. SVOBODA, Le système numérique de classes résiduelles dans les machines mathématiques. Automatisme 5 (1960), S. 16—24 und S. 65—69.
 - [9] P. H. FUSS, N. FUSS (Herausg.), Leonhardi Euleri commentationes arithmeticae collectae, Tom. I. Acad. Imperial. Scient. Petropoli, 1849. Insbes. Kapitel XXXV, Disquisitio accuratio circa residua ex divisione quadratorum altiorumque potestatum per numeros primos relicta, S. 487—506, und Kapitel XXXVII, Demonstrationes circa residua ex divisione potestatum per numeros primos resultantia, S. 516—537. (Anm.: Eine Indextabelle ist auf S. 523 wiedergegeben.)
 - [10] C. G. J. JACOBI (Herausg.), Canon arithmeticus sive tabulae quibus exhibentur pro singulis numeris primis vel primorum potestatibus infra 1000 numeri ad datos indices et indices ad datos numeros pertinentes. Acad. Berolini, 1839, 248 S.
 - [11] C. F. GAUSS, Disquisitiones arithmeticae. Lipsiae, 1801. Insbes. Art. 58, S. 54 ff.
- Weitere Literatur über das Restklassensystem
- [12] H. L. GARNER, The Residue Number System. Vortrag, Western Joint Computer Conference, San Francisco/Cal., 3. bis 5. März 1959. (Anm.: Der Inhalt dieses Vortrages entspricht im wesentlichen dem Kapitel 5 von H. L. Garners Dissertation, Error Checking and the Structure of Binary Addition, Universität von Michigan/USA, 1958, S. 105—140.)
 - [13] H. L. GARNER, The Residue Number System. IRE Trans. Electronic Computers EC-8 (1959), S. 140—147.
 - [14] M. A. MACLEAN, D. ASPINALL, A Decimal Adder Using a Stored Addition Table. Proc. Instn. Electrical Engrs. 105, Teil B (1958), S. 129—135, Diskussion S. 144—146.
 - [15] W. W. PETERSON, On Checking an Adder. IBM Journal Res. & Dev. 2 (1958), S. 166—168.
 - [16] US Patentschrift 2,886,240, Check Symbol Apparatus, von M. Linsman, Internat. Standard Electric Corp., New York, N. Y. Priorität: Niederlande, 2. April 1954.
 - [17] US Patentschrift 2,911,149, Calculating Means, von N. L. M. Rouche, Internat. Standard Electric Corp., New York, N. Y. Priorität: Niederlande, 17. September 1955.

Empfehlenswerte Lehrbücher über Zahlentheorie

- [18] I. M. WINOGRADOW, Elemente der Zahlentheorie, München 1956, Verlag R. Oldenbourg.
- [19] J. V. USPENSKY, M. A. HEASLET, Elementary Number Theory, New York 1939, MacGraw-Hill.
- [20] G. WERTHEIM, Anfangsgründe der Zahlenlehre, Braunschweig 1902, Verlag Fr. Vieweg & Sohn.

Anschriften: Dipl.-Phys. WALTER HOFFMANN, Bahnhofstr. 11, Rüschlikon bei Zürich, Schweiz
 Dr. HELMUT E. MÜLLER, Ankdammsgatan 35, Solna 1, Schweden

Über einen Rechenautomaten, der eine mathematische Sprache versteht

Von LÁSZLÓ KALMÁR

Auf dem Warschauer Symposium September 1959 über Grundlagen der Mathematik habe ich — der Richtung des Symposiums entsprechend vom rein theoretischen Standpunkt aus — über die Grundideen eines Rechenautomaten berichtet, der auf eine mathematische Formelsprache programmiert werden kann, indem er die einzelnen Zeichen seines in einer solchen Sprache geschriebenen Programmes nacheinander als Befehle ausführt. Hier berichte ich über eine praktisch mögliche Form eines solchen Automaten.

Werte von (ohne Weglassen von Klammern aufzuschreibenden) Termen — z. B. $((a \times d) - (b \times c))/(x - y)$ — werden mit Hilfe einer Folge von Quadrupeln von Registern LOR_n , ROR_n (linke und rechte Operandenregister), OR_n (Operationsregister), ER_n (Ergebnisregister) berechnet ($n = 0, 1, 2, \dots$), deren „leerer“ Ausgangszustand verschieden von dem durch eine Zahl „gefüllten“ Zustand ist (auch wenn sie gleich Null ist). Werden LOR_n und ROR_n durch die beiden Operanden, OR_n aber durch die Schlüsselzahl einer Operation gefüllt, so werden die Operanden in die Eingangsregister des für die Berechnung des Operationswertes bestimmten Rechen-

werkes (bei komplizierten Operationen des eingebauten Unterprogramms) übertragen, von dessen Ausgangsregister das Ergebnis nach vollendeter Berechnung in ER_n zurückübertragen wird. Für $n > 0$ geht es dann, unter gleichzeitiger Entleerung von LOR_n , ROR_n , OR_n und ER_n , in dasjenige der Register LOR_{n-1} und ROR_{n-1} weiter, welches im voraus mit ER_n „verbunden“ wurde.

Jede skalare (d. h. indexlose) Variable bezeichnet ständig den Inhalt einer festen Speicherzelle, die durch die Schlüsselzahl der Variablen adressiert wird. Als Befehl bewirkt eine skalare Variable die Übertragung des Inhalts dieser Zelle in das an die Reihe kommende (kurz: aktive) Register (bzw., falls ER_0 das aktive Register ist, seines Inhalts in jene Zelle nebst Entleerung von LOR_0 , ROR_0 , OR_0 und ER_0); in ähnlicher Weise bewirkt ein Operationszeichen die Übertragung seiner Schlüsselzahl in das aktive Register. Eine linke Klammer bewirkt als Befehl die Verbindung des aktiven Registers mit ER_n mit nächsthöherem n ; eine rechte Klammer bewirkt keinen Befehl. Ein \Rightarrow -Zeichen als Befehl dient nur zur Übertragung des Wertes des auf seiner linken Seite stehenden Termes nach ER_0 im Falle, daß letzterer eine Variable ist oder eine Konstante als letzten Operanden besitzt. Eine Kennziffer des Registers, das als aktiv zu betrachten ist, wird in einem Steuerungsregister vermerkt, dessen Inhalt bei jedem Befehl in entsprechender Weise geändert wird.

Konstanten sind im Programm als Dezimalzahlen zu schreiben. Sie werden in einem Zahlenumrechner in (etwa binäre) Maschinenform umgewandelt. Da der hierzu nötige, den einzelnen Ziffern z entsprechende Befehl (nämlich: „multipliziere die bisher erhaltene Zahl mit 10 und addiere z “ bzw. „addiere zu der bisher erhaltenen Zahl das Produkt von z mit der entsprechenden negativen Potenz von 10 “) davon abhängt, ob z vor oder nach dem Komma steht, wird dieser Umstand nebst dem „entsprechende Potenz von 10 “ in einem besonderen Register notiert, dessen Inhalt durch das Komma bzw. durch die nachfolgenden Ziffern als Befehle entsprechend geändert wird.

In ähnlicher Weise werden die Adressen der (durch von den skalaren Variablen verschiedene Buchstaben mit einem, zwei oder mehreren Indizes bezeichneten) Matrizenelemente berechnet auf Grund des als Matrizennamen dienenden Buchstabens, sowie der wie oben berechneten Werte der Indizes. Zu diesem Zwecke wird vermittle der entsprechenden, im Programm figurierenden Matrizendeklaration, wodurch die Höchstwerte der Indizes der entsprechenden Matrizenelemente für den fraglichen Matrizennamen angegeben werden, mit Hilfe eines Registers, das stets die Minimaladresse der für die Matrizenelemente zur Verfügung stehenden Speicherzelle registriert, die Anfangsadresse und die Spannen der entsprechenden Matrizenelemente berechnet und zu einem Worte vereinigt, das dann in der durch die Schlüsselzahl des Matrizennamens adressierten Zelle gespeichert wird. Kommt nun im Programm ein entsprechendes Matrizenelement vor, dann wird durch den Matrizennamen als Befehl eine Aufteilung dieses Wortes nebst Übertragung seiner Bestandteile: Anfangsadresse und Spannen, in die entsprechenden Register eines Adressenberechners bewirkt. Die Berechnung der gewünschten Adresse läßt sich nunmehr durch Multiplikationen und Additionen ausführen. Das letzte Zeichen des Matrizenelementes, eine rechte Indexklammer, bewirkt als Befehl dasselbe wie eine skalare Variable, jedoch mit der im Adressenumrechner berechneten Adresse in der Rolle der Schlüsselzahl der skalaren Variablen.

Einstellige elementare Funktionen werden durch die Angabe einer Kennziffer der entsprechenden eingebauten Unterprogramme als ersten und des Arguments der Funktion als zweiten Operanden einer festen, speziell zu diesem Zwecke dienenden Operation bezeichnet. Man darf aber auch die üblichen Bezeichnungen verwenden, vorausgesetzt, daß z. B. das Wort \sin , falls etwa 17 als Schlüsselzahl des entsprechenden Unterprogramms und etwa $*$ als Operationszeichen für die genannte spezielle Operation verwendet wird, in gleicher Weise wie $(17* \text{ verschlüsselt wird})$ (das Fehlen der rechten Klammer in $(17* x$, d. h. $\sin x$, stört nicht).

Die Wahrheitswerte von Formeln (z. B. $(\text{abs.}(x - \bar{x}) < \varepsilon) \vee ((x < 0) \wedge (y < 0))$) werden in der gleichen Weise wie die Werte der Terme berechnet, indem die beiden Vorzeichen als Wahrheitswerte verwendet werden. Dadurch wird das Einbeziehen von bedingten Sprunganweisungen ins Programm ermöglicht und auch das Einbeziehen von unbedingten Sprunganweisungen, indem der Inhalt von ER_0 im leeren Zustand etwa als positiv angesehen wird. Die Bezugsnummern werden ebenfalls im Zahlenumrechner umgewandelt und dann, auf Grund der Wirkung des zwischen der Bezugsnummer und der entsprechenden Anweisung stehenden Zeichens (etwa:) bzw. (in Sprunganweisungen) des nach der Bezugsnummer stehenden Sprungzeichens als Befehl, in entsprechender Weise verwendet (zur Übertragung des Inhalts des Befehlszählers in ein durch die Bezugsnummer gekennzeichnetes Register bzw. des Inhalts dieses Registers in den Befehlszähler).

Die Schlüsselzahlen der nacheinanderfolgenden Zeichen des Programmes werden als Komponenten eines „Programmvektors“ (d. h. Matrizen mit einem Index) gespeichert; statt einer entsprechenden Matrizendeklaration wird die Anzahl dieser Zeichen während des Ablesens des Programmbandes (oder der Programmkarten) gezählt. Dadurch wird die Modifikation der Befehle durch das Programm selbst ermöglicht.

Durch Verwendung von speziellen Zyklensklammern (etwa { }) können Anweisungen zur iterierten Ausführung von Programmteilen programmiert werden. Nach der linken Zyklensklammer sollen, voneinander durch spezielle Zeichen getrennt, die als Parameter dienende skalare Variable, deren Anfangswert, Spanne und eventuell Endwert und erst dann der zu iterierende Programmteil angegeben werden; im Falle eines Fehlens des Endwertes soll nach diesem Programmteil, vor der rechten Zyklensklammer, die Iterationsbedingung in der Form einer Formel angegeben werden. Zur Identifizierung der entsprechenden linken und rechten Zyklensklammer wird 1 zu dem Inhalt eines Zyklenzählers bei jeder linken Zyklensklammer addiert, bei jeder keine Iteration mehr hervorrufenden rechten Zyklensklammer aber davon subtrahiert. Durch die linke Zyklensklammer als Befehl wird zugleich ein dem Inhalt des Zyklenzählers als Kennziffer entsprechendes Parameterregister aktiviert; der nachfolgende Parameter als Befehl bewirkt im Fall, daß ein Parameterregister aktiv ist, eine Übertragung seiner Schlüsselzahl (und nicht seines Wertes!) in das aktive Register. Die erwähnten Trennzeichen als Befehle bewirken die Übertragung des Anfangswertes in die durch die Schlüsselzahl des Parameters adressierte Zelle, der Parameterspanne und des Endwertes aber in ein dem Inhalt des Zyklenzählers als Kennziffer entsprechendes Register. Auch der Inhalt des Befehlszählers (vor Ausführung des ersten Zeichens des zu iterierenden Programmteiles) wird durch die Wirkung des letzten Trennzeichens als Befehl in ein spezielles, dem Inhalt des Zyklenzählers als Kennziffer entsprechendes Register übertragen. Die rechte Zyklensklammer als Befehl bewirkt dann auf Grund der so gespeicherten Daten die nötige Kontrolle des Endes der Iteration und, je nach dem Ergebnis dieser Kontrolle, die Vermehrung des Parameterwertes um die entsprechende Spanne nebst Sprung zum zu iterierenden Programmteil oder Verminderung des Inhalts des Zyklenzählers um 1 nebst Weitergehen.

Das Drucken des Inhalts von ER_0 nach vorangehender Dezimalumrechnung läßt sich mit Hilfe eines Druckzeichens, das Halten mit Hilfe eines Stopzeichens programmieren.

Die obige Betrachtung führt auch zu einer Auswertung von verschiedenen Programmiersprachen hinsichtlich der Redundanz (überflüssige Zeichen) und der Richtigkeit der Reihenfolge der durch die einzelnen Zeichen gegebenen Informationen. Insbesondere zeigt sich, daß ALGOL nicht in jeder Hinsicht zweckmäßig ausfällt.

Durch Nachahmung des oben skizzierten Automaten mittels eines interpretierenden Programmes auf einem beliebigen Rechenautomaten gewinnt man einen Übersetzer (programmieren-des Programm) für den letzteren. Allerdings überläßt ein so gewonnener Übersetzer alle Fragen der Einsparung (von Befehlen, von Arbeitszellen) dem Programmierer, wobei dieser durch geschickte Umformung des für den oben skizzierten Automaten geschriebenen Programmes oft eine solche Einsparung erzielen kann.

Anschrift: Prof. Dr. L. KALMÁR, Bolyai Institut der Universität, Szeged (Ungarn), Aradi vértanúk tere 1

Ziffernrechenautomat mit Programmierung nach mathematischem Formelbild*)

VON W. KÄMMERER

Programmgesteuerte Rechenautomaten in der z. Z. üblichen Bauart betrachten als Programmelemente die einzelnen arithmetischen, logistischen oder organisatorischen Grundoperationen jeweils in Verbindung mit Adressen. Die solcherart arbeitenden Automaten im Typ der Ein- oder Mehradreßmaschinen machen es notwendig, bei der Programmierung den in Form eines Algorithmus vorliegenden Plan dadurch maschinengerecht umzubilden, daß dieser den Programmelementen entsprechend aufgeteilt und gegebenenfalls umgestellt wird. Dadurch entfernt man sich aber derart weit von dem international eingebürgerten mathematischen Formelbild, daß man viele Vorteile verliert, die eine über Jahrhunderte verlaufende Entwicklung eben in diesem Formelbild gewonnen hat. Die Angabe von Adressen für alle Hilfsgrößen ist maschinenbedingt, der Rechenaufgabe gegenüber aber problemfremd. Die Behandlung indizesbehafteter Größen ist schleppend. Auf die strukturellen Probleme des Flußdiagramms sind die derzeitigen Automaten nur ungenügend vorbereitet.

Man hat versucht, diese Schwierigkeiten der Programmierung zu mildern, indem man besondere Programmierungstechniken entwickelte: Schaffung von Bibliotheksprogrammen, Verwendung von Pseudo-Codierungen, Heranziehung des Automaten zur Berechnung der Rechenpläne usw.

*) Auf Einladung der Tagungsleitung gehaltener Hauptvortrag. Der vorliegende Bericht ist ein Teilauszug aus der gleichnamigen Habilitationsschrift des Berichterstatters, die 1958 der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Friedrich-Schiller-Universität Jena vorgelegt und in vollem Wortlaut im Jenaer Jahrbuch 1959 II, wissenschaftliche Veröffentlichungen des VEB Carl Zeiss, S. 396—440, veröffentlicht wurde.

Hier soll demgegenüber von einem Versuch berichtet werden, diese Schwierigkeiten in der Programmierung dadurch zu überwinden, daß die Struktur des Automaten unter Ausnutzung heute gegebener technischer Möglichkeiten den Erfordernissen enger angepaßt wird.

Die Forderung, nur die problemnahen Größen in den Gesichtskreis des Programmierers aufzunehmen, führt zu einer Abkehr von der Verknüpfung jeweils eines Operationssymbols und eines Operandensymbols zu einem Befehl. Diese Verselbständigung der Operationssymbole auf der einen Seite und der eine Größe charakterisierenden Symbole auf der anderen Seite ist ein notwendiger Schritt, um Plangleichungen in mathematischem Formelbild direkt als Rechenpläne verwenden zu können. Damit wird aber der Automat gezwungen, die ihm nun fehlenden Informationen selbst zu beschaffen. Er muß über einen Teil seiner Speicherkapazität selbst verfügen, ihm muß ein „inneres automatisches Gedächtnis“ eigen sein. Vom Programmierer her werden seinem äußeren Speicher über die Eingabe nur das Programm und die problemnahen Größen mit-

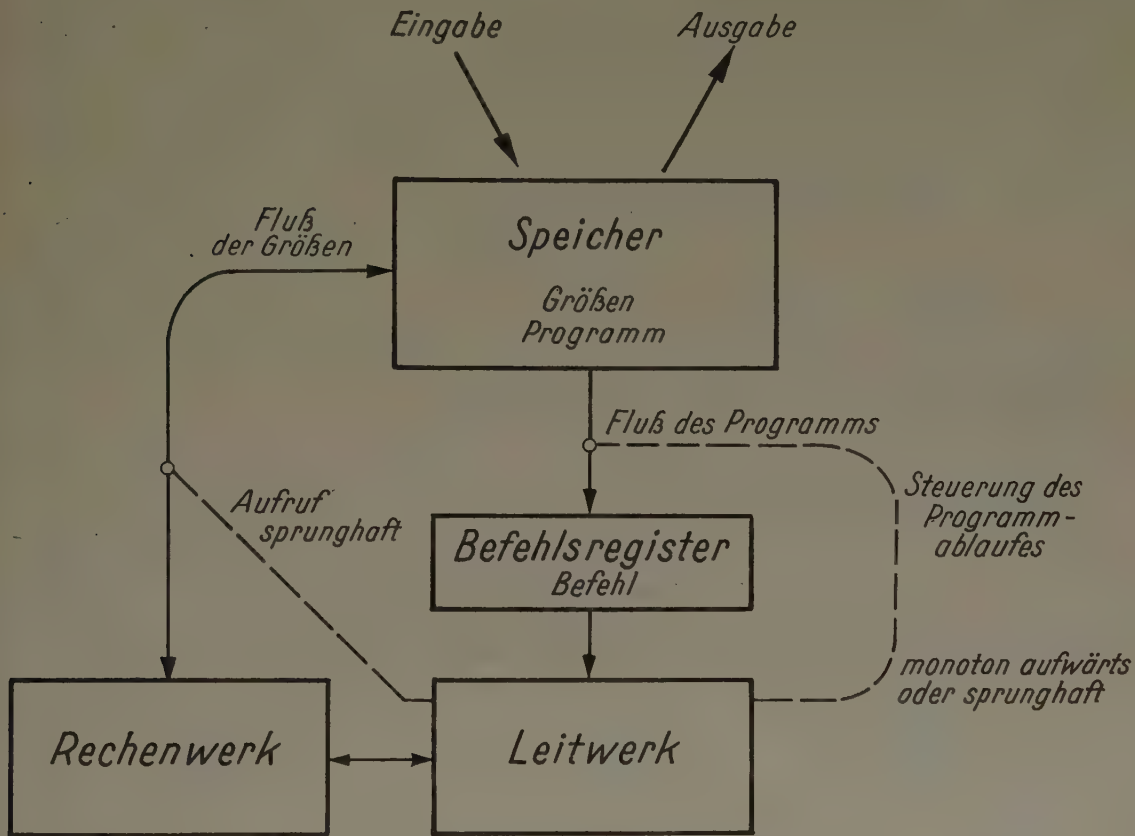


Bild 1. Übliche Struktur eines Rechenautomaten

geteilt. Beim Programmablauf wird der Automat nun nacheinander die einzelnen Planelemente aufnehmen, das sind die einzelnen Operationszeichen der Plangleichung und die Symbole, die Größen charakterisieren und die wir uns mittels eines kompilierenden Verfahrens durch absolute Adressen ersetzt denken wollen. Ausführen wird der Automat aber jeweils nur, was sich als ausführungsmöglich bis dahin geklärt hat, das Restliche wird er in seinem Gedächtnis zurückstellen, bis es nach Eingang noch weiterer Informationen als eindeutige Operation erkannt wird.

Bei der üblichen Struktur eines Rechenautomaten (Bild 1) steuert das Leitwerk auf Grund eines im Befehlsregister anstehenden Befehls (Operation mit Adresse!) das Rechenwerk evtl. in Rückwirkung bei bedingten Operationen, den Fluß der Größen und den Programmablauf.

Das Einbeziehen eines inneren Gedächtnisses in die Arbeitsweise des Automaten führt zu einer davon abweichenden Struktur (Bild 2). Das in Form einer linearen Kette von Zellen (Register) aufgebaute Gedächtnis steht nur mit einer Zelle der Maschine direkt zur Verfügung. Wir nennen diese die Zelle vom Dienst (ZvD). Im Ablauf kann die Funktion der ZvD in Einzelschritten aufwärts und abwärts auf andere Zellen des Gedächtnisses übergeben werden. Die jeweilige ZvD steht dem Leitwerk zum Aufbewahren von Werten aus dem Rechenwerk und dem Befehlszähler, sowie zum Anmerken mittels Markierungen zur Verfügung. Das Leitwerk bildet den Befehl nun erst kombinierend aus dem Planelement, das im Befehlsregister steht — also nur Operations-

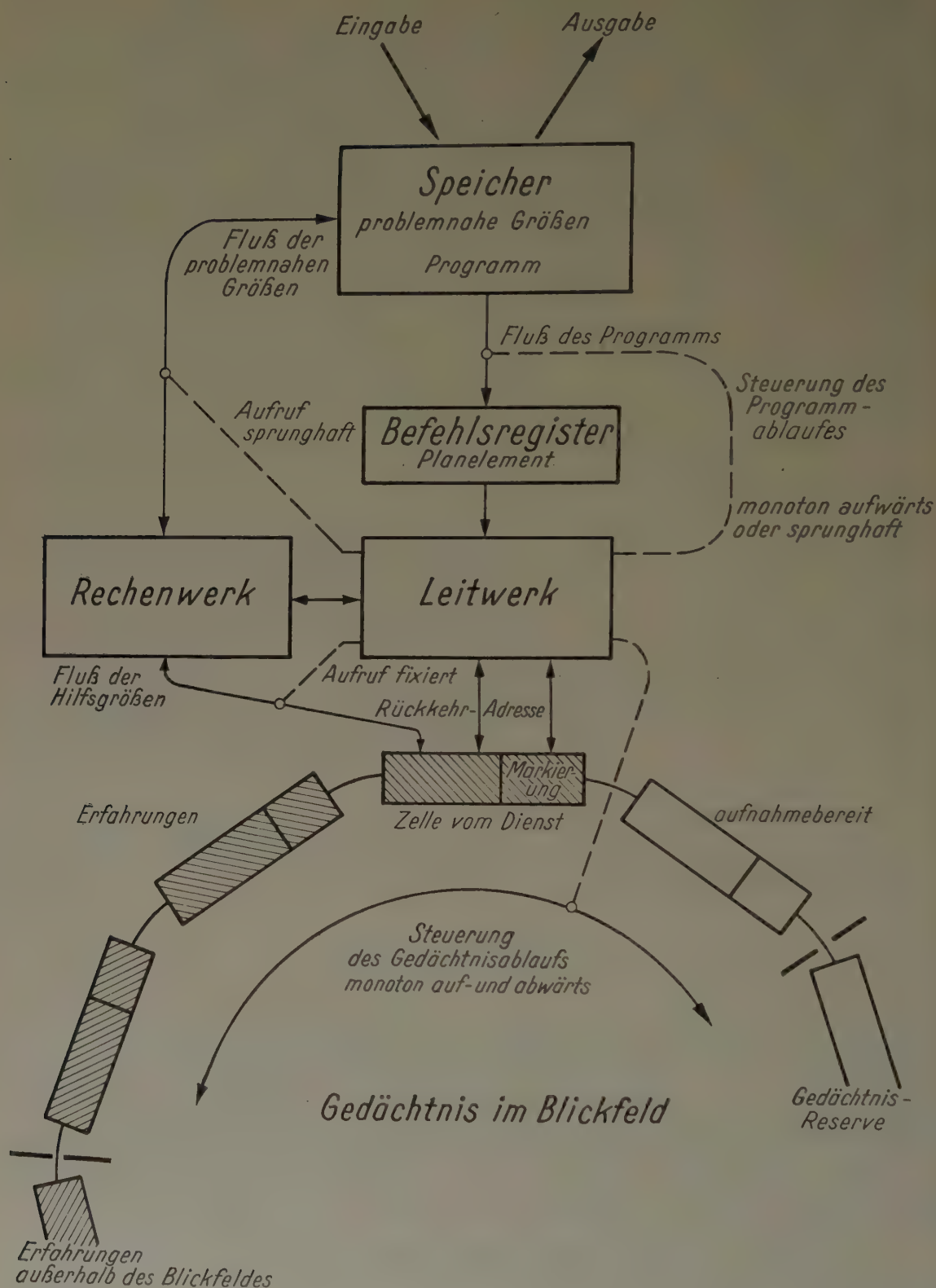


Bild 2. Struktur einer Rechenmaschine mit automatischem Gedächtnis

symbol oder nur Adresse — und evtl. Markierungen aus der ZvD. Dabei können nur bestimmte Kombinationen auftreten. In Auswirkung dieses Befehls greift das Leitwerk evtl. beschreibend auf die ZvD ein, steuernd auf das Rechenwerk, auf den Fluß problemnaher Größen in den Gedächtnisablauf und in den Programmfluß.

Bei Planelementen, die hinsichtlich der Situationsspannung lösend wirken, wie etwa eine schließende Klammer, verschiebt sich die Lage der ZvD nach der Seite gemachter Erfahrungen, die nun herangezogen und nach Erledigung vergessen werden können, wonach diese Zellen zu den aufnahmebereiten Zellen der Gedächtnisreserve übergehen. Bei Planelementen mit spannungserhöhender Tendenz wie etwa einer öffnenden Klammer, greift das Leitwerk nach der Seite der Gedächtnisreserve und legt hier Vermerke nieder, wobei andere Elemente mit älteren Vermerken weiter aus dem derzeitigen Blickfeld des Leitwerkes geschoben werden.

Um das Verfahren an einem einfachen Beispiel erläutern zu können, werde für einige Planelemente eine mögliche Befehlsliste gegeben. Diese ist den vorliegenden Belangen entsprechend vereinfacht. Dabei ist RR das Resultatregister der Maschine, ZvD die Zelle vom Dienst, die durch zusätzliche Angaben wie A, S, M, D, F markiert werden kann, wobei wir uns hier nicht auf die Frage der Codierung dieser Markierungen einlassen wollen. Die Befehlsliste hat unter Umständen bedingten Charakter bezüglich des Eingreifens solcher Markierungen.

Anfang einer Plangleichung (Bild 3):

Löscht die ZvD, merkt A an (A soll auf „nachhängende Addition“ hinweisen, S entsprechend auf „nachhängende Subtraktion“.)

Größensymbol etwa *a* (Bild 4)
(mittels kompilierender Methode durch absolute Adresse ersetzt):
Wird nach „ergibt“ ⇒ umgedeutet:

Bringt den Zahlenwert *a* nach RR.
Speichert Inhalt von RR unter der Adresse *a* ab.

Plan- element		ZvD (Zelle vom Dienst)	RR (Resultat- Register)
Anfang		alt	
		0	
		neu A	

Bild 3

Plan- element		ZvD	RR
Symbol (Adresse) etwa <i>a</i>		$p-1 \quad p \quad p+1$	
			<i>a</i>
	Nach „ergibt“ ⇒ umgedeutet		$\langle RR \rangle \Rightarrow a$

Bild 4

+ Zeichen (Bild 5):

Befragt die ZvD nach Markierung A oder S, ob eine Addition oder Subtraktion nachhängt, führt diese mit dem Inhalt der ZvD als erstem Operanden und dem Inhalt des RR als zweitem Operanden aus und bringt das Resultat nach der ZvD. Für den späteren Ablauf wird das Nachhängen dieses bis dahin unerledigten + - Zeichens durch Markierung zu erkennen ermöglicht. Die ZvD verläßt diese Operation mit A markiert.

— Zeichen (Bild 6):

Entsprechend wie beim + Zeichen, nur daß die ZvD diese Operation mit S markiert verläßt.

„Ergibt“ ⇒ (Bild 7):

Befragt zunächst ebenfalls die ZvD nach A oder S, ob eine Addition oder Subtraktion nachhängt, führt diese mit dem Inhalt der ZvD als erstem Operanden und dem Inhalt des RR als zweitem Operanden aus.

Plan- element	Kombiniert mit Markierung	ZvD	RR
+	A	$p-1 \quad p \quad p+1$ \overline{x} alt A $x+y$ neu A	y
	S	x alt S $x-y$ neu A	y

Bild 5

Plan- element	Kombiniert mit Markierung	ZvD	RR
	A	$p-1 \quad p \quad p+1$ \overline{x} A $x+y$ S	y
	S	x S $x-y$ S	y

Bild 6

Im Gegensatz zum vorhergehenden bleibt das Resultat aber in RR. In ein folgendes Größensymbol greift das Ergibtzeichen umdeutend ein.

Liest das folgende Element und befragt es, ob es ein Größensymbol a ist. In diesem Falle wird die entsprechende Zahl eingeholt und mit dem Inhalt des RR multipliziert. Das Produkt steht dann in RR. Liegt dagegen als folgendes Element kein Größensymbol vor, so wird der Inhalt des RR in der der ZvD folgenden freien Zelle gespeichert. Diese übernimmt damit die Funktion der ZvD und wird zusätzlich mit M gekennzeichnet.

× Zeichen (Bild 8):

Plan- element	Kombiniert mit Markierung	ZvD	RR
	A	$p-1 \quad p \quad p+1$ \overline{x} A	y
⇒ „ergibt“	S	$x+y$ x S	y
		$x-y$	

Deutet ein nachfolgendes a um in $\langle RR \rangle \Rightarrow a$

Bild 7

Plan- element	ZvD	RR
	$p-1 \quad p \quad p+1$ \overline{x} wenn a folgt	y
× (Multipli- kation)	$y \cdot a$ $p \quad p+1$ y wenn $\{$ folgt y M	

Bild 8

Plangleichung:

$$a - b + c \cdot (d + e) \Rightarrow Z$$

Rechenplan		Komb. mit Mark.	Gedächtniszellen				RR	Sprung oder Ab- speiche- rung
Nr.	Plan- element		1.	2.	3.	...		
0	Anfang		0 A					
1	a						a	
2	—	A	$0 + a$ S					
3	b						b	
4	+	S	$a - b$ A					
5	c						c	
6	\times			c M				
7	(0 A			
8	d						d	
9	+	A			$0 + d$ A			
10	e						e	
11)	A					$d + e$	
		M					$c \cdot (d + e)$	
12	\Rightarrow	A					$a - b + c \cdot (d + e)$	
13	Z							$\Rightarrow Z$

Bild 11

Das dann in das Befehlsregister tretende Planelement „—“ befragt die ZvD — dies ist nach wie vor die 1. Gedächtniszelle — nach Markierung A oder S. Da die vorhandene Markierung A ist, löst die Kombination:

Planelement im Befehlsregister „—“
Markierung der ZvD A

die Maschine zu der Rechenoperation aus, die zu dem Zahleninhalt der ZvD den Inhalt des RR addiert, das Resultat $0 + a$ als neuen Zahleninhalt der ZvD aufbewahrt und mit S markiert.

Das folgende „b“ als Planelement führt zum Einholen des Wertes b aus dem Speicher und zu seiner Deponierung im RR.

Es folgt das Planelement „+“.

Die Kombination „+“ S führt dazu, daß die ZvD mit $a - b$ beschrieben und mit A markiert wird.

Es folgt das Planelement c ; somit wird in das RR der Wert von c eingeschrieben.

Das darauf folgende Multiplikationszeichen \times löst eine diesem Zeichen zugeordnete Befehlssteuerkette aus, die das folgende Befehlsselement anfordert und ihre Fortsetzung erst auf Grund dieses nächsten Befehlsselementes findet. Die in unserem Fall auftretenden Folge $\times \{$ führt dazu, daß die 1. Gedächtniszelle ihre Eigenschaft als ZvD an die 2. Gedächtniszelle abgibt, ihren Inhalt jedoch als gemachte Erfahrung zur späteren Verwendung beibehält. In die neue ZvD wird der Inhalt des RR c abgespeichert und mit M markiert.

Mit dem jetzt zur eigenen Auswirkung kommenden Planelement $\{$ übernimmt die 3. Gedächtniszelle die Eigenschaft von ZvD, wobei sie gelöscht und mit A markiert wird.

Auf diesem neuen Niveau spielt sich in der uns nun bekannten Weise die Folge der Planelemente $d + e$ ab.

Aber erst das spannungslösende Element $\}$ bildet in Kombination mit der hinzutretenden Markierung A den Klammerwert $d + e$ und bringt ihn in das RR. Das sodann ausgelöste Zurückgreifen um eine Stufe in der Lage der ZvD bringt die Erfahrung aus der 2. Gedächtniszelle — es ist dies $c \cdot M$ — wieder in den Gesichtskreis. Die dadurch auftretende Kombination mit der Markierung M läßt das Produkt $c \cdot (d + e)$ entstehen und in das RR ablegen. Die Lage der ZvD wird nochmals um eine Stufe erniedrigt.

Dadurch tritt das folgende Planelement \Rightarrow mit der Markierung A der 1. Gedächtniszelle zusammen, so daß die noch nachhängende Addition der Operanden

$$(a - b) \quad \text{und} \quad c \cdot (d + e)$$

zur Erledigung kommt, wobei das Resultat in das RR abgelegt wird.

Die durch das Ergibtzeichen erfolgende Umdeutung des nächsten Planelements „z“ in einen Abspeicherbefehl bringt das gewünschte Resultat an den für z vorgesehenen Speicherplatz.

Eine entsprechend angepaßte Bibliotheksprogrammtechnik bezieht auch Funktionen in dieses Programmierungsverfahren nach mathematischem Formelbild ein, und zwar Funktionen von einem und von mehreren Parametern, ebenso Funktionen von Funktionen, auch in Verschachtelung, sowie mathematische Verfahren. Im Rahmen dieses Berichtes sei nur ein einfaches Beispiel in dieser Richtung gegeben, das den Weg erkennen läßt.

Das vorige Beispiel werde variiert in

$$a - b + c \cdot (d + e) - \sin(a + b) \Rightarrow z.$$

Dazu wird zunächst als weiteres Planelement das allgemeine Funktionszeichen f , hier realisiert als \sin , nötig, wobei ein vorausgehendes kompilierendes Verfahren hierfür schon die Adresse n des entsprechenden Unterplans gesetzt hat.

Plan- element	Kombiniert mit Markierung	ZvD	RR
f Funktion		<div style="border-left: 1px solid black; height: 40px; position: relative;"><div style="position: absolute; top: 0; right: 0; width: 10px; height: 10px; border: 1px solid black;"></div></div>	
z. B. \sin		<div style="border-left: 1px solid black; height: 40px; position: relative;"><div style="position: absolute; top: 0; right: 0; width: 10px; height: 10px; border: 1px solid black;"></div></div>	

Anm.: Das Funktionssymbol wird mittels kompilierender Methode durch die Adresse n des entsprechenden Unterplanes ersetzt.

Bild 12

Plan- element	Kombi- niert mit Mar- kierung	ZvD	RR	Sprung oder Ab- speiche- rung
A oder S		<div style="border-left: 1px solid black; height: 100px; position: relative;"><div style="position: absolute; top: 0; right: 0; width: 10px; height: 10px; border: 1px solid black;"></div></div>	y	
F		<div style="border-left: 1px solid black; height: 100px; position: relative;"><div style="position: absolute; top: 0; right: 0; width: 10px; height: 10px; border: 1px solid black;"></div></div>	$x \pm y$	$\Rightarrow n$
		<div style="border-left: 1px solid black; height: 100px; position: relative;"><div style="position: absolute; top: 0; right: 0; width: 10px; height: 10px; border: 1px solid black;"></div></div>		$\rightarrow n + 1$
		<div style="border-left: 1px solid black; height: 100px; position: relative;"><div style="position: absolute; top: 0; right: 0; width: 10px; height: 10px; border: 1px solid black;"></div></div>		

Bild 13

In dem Befehlsregister tritt dieses Planelement in der Form $f n$ auf. Demzufolge wird die Lage der ZvD um ein Niveau erhöht und hier die Adresse n des entsprechenden Unterplans markiert mit F niedergelegt (Bild 12).

Zur Syntax gehört, daß auf ein Funktionszeichen eine öffnende Klammer folgen muß. Diese Klammer leitet die Liste der Funktionsparameter ein. Abgeschlossen wird diese Parameterliste wieder durch eine schließende Klammer.

In unseren bisherigen Betrachtungen war das Planelement „schließende Klammer“ in sekundärer Kombination nur mit der Markierung M behandelt worden.

Wir fügen hinzu die Kombination einer schließenden Klammer mit einer sekundären F Markierung (Bild 13).

Auch hier beginnt der Ablauf mit der primären Kombination mit A oder S und speichert das Resultat in RR. Nach dem anschließenden Rückwärtsgreifen hinsichtlich der ZvD tritt aus der Erfahrung nun die Marke F in sekundärer Kombination hinzu.

Die Maschine reagiert darauf mit dem Abspeichern des in RR befindlichen Wertes nach der aus der ZvD entnommenen Adresse n . Auf diese Weise wird der Funktionsparameter — sein numerischer Wert befindet sich in RR — in den Unterplan (Zelle n) überführt.

Der Ablauf findet seine Fortsetzung durch einen Sprung zur Zelle $n + 1$. In der ZvD wird zuvor noch die der Absprungstelle folgende Adresse als Rückkehradresse notiert, sodann zur höheren Gedächtniszelle übergegangen, diese gelöscht und mit A markiert.

Treten in der Funktion mehrere Parameter auf, so werden diese im Plan durch ein passendes Planelement voneinander getrennt. Dieses Parametertrennzeichen hat ähnliche Funktion wie die zuvor erläuterte Kombination einer schließenden Klammer mit der Marke F. Es unterbleibt

nur der Sprung und das Einschreiben der Rückkehradresse; statt dessen wird in diese Zelle — sie trägt jetzt die erhöhte Adresse $n + 1$ — wieder die Marke F angebracht. Dadurch wird die später erfolgende Überführung des folgenden Parameters nach der nächsten Zelle ($n + 1$) des Unterplanes vorbereitet.

Schließlich wirkt hier noch das Planelement „Rückkehr“ mit, das die anhängende Rechnung entsprechend der Marke A bzw. S zu Ende führt, um sodann aus der um ein Niveau tiefer liegenden Zelle die Rückkehradresse finden zu lassen (Bild 14). Damit wird der Rücksprung ermöglicht. Dabei bringt das Resultatregister das Resultat aus dem Unterplan mit. Ein nochmaliges Zurückgreifen in der ZvD beendet diese Operation.

Die Plangleichung

$$a - b + c \cdot (d + e) - \sin(a + b) \Rightarrow z$$

verläuft in den Schritten 0 bis 11 wie beim verkürzten Beispiel.

Von Schritt 12 an zeigt es selbständigen Verlauf (Bild 15).

Das Planelement „—“ bildet in Kombination mit der Marke A die Summe aus dem Inhalt des RR und dem Inhalt des ZvD und hebt diese im ZvD mit S markiert auf.

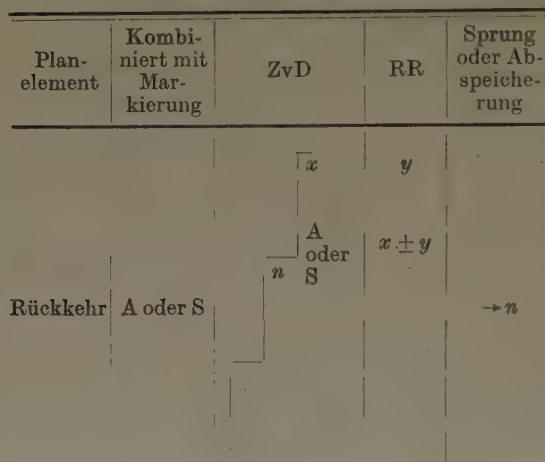


Bild 14

Das folgende Planelement in Form einer Funktionskennzeichnung verschiebt die Lage der ZvD nach rechts, speichert hier die Adresse n des Unterplans sin mit F markiert ab.

Die Planelemente Nr. 14 bis 18 dienen in der uns bekannten Weise zur Berechnung des numerischen Wertes des Parameters.

Dabei schließt das Planelement } der Zeile Nr. 18 in Kombination mit der Marke A zunächst diese Parameterberechnung ab, wobei der Wert $a + b$ im RR zu stehen kommt. Im sekundären Schritt der Erniedrigung hinsichtlich der ZvD-Lage tritt die Kombination mit F auf, die den in RR befindlichen Wert nach der Adresse n abspeichern läßt, um sodann dem erhöhten Wert $n + 1$ entsprechend den Sprung in den Unterplan auszulösen, wobei die Adresse $18 + 1 = 19$ als Rückkehradresse festgehalten wird. Rückkehr zum Niveau der 3. Gedächtniszelle beendet die Abarbeitung dieses Planelementes.

Der Unterplan zur Berechnung des Sinuswertes für das in seiner ersten Zelle stehende Argument wird mit der zweiten Zelle beginnend durchlaufen. Auf Einzelheiten sei hier der beschränkten Zeit wegen verzichtet.

In der letzten Zeile des Unterplans tritt das Planelement „Rückkehr“ auf. Dies führt zunächst zur Bildung des abschließenden Wertes $\sin(a + b)$, der in das RR zu stehen kommt. Danach erfolgt der Rücksprung gemäß der im ZvD — es ist die Gedächtniszelle Nr. 2 — aufzufindenden Adresse 19.

Die Planelemente der Zeilen Nr. 19 und 20 schließen dann die Auswertung unserer Plangleichung ab.

Erwähnt sei, daß neben Plangleichungen arithmetischen Charakters auch solche logistischen Charakters treten können. Ebenso kann hier angedeutet werden, daß auch indizesbehaftete Größen eine Behandlung erfahren können, die weitgehend der im mathematischen Formelbild gewohnten Schreibweise entspricht.

Das Vorgetragene stellt einen Versuch dar; es wird noch viel Arbeit aufgewendet werden müssen, um hier zu einer vollen Maschinenkonzeption zu kommen.

Dabei liegen die Schwierigkeiten nicht so sehr auf der technischen Seite der Realisierung. Die Auflösung des klassischen Leitwerks in Steuerketten etwa auf der Basis von Ferritkernschiebelinien, wie im ZRA 1 eine recht komplexe Befehlssteuerung durchgeführt wurde, oder auch ähnlich den von BILLING gegebenen Vorstellungen zur Mikroprogrammierung, ist ein technisch gangbarer Weg.

Der Hauptteil der zu leistenden Arbeit liegt vielmehr darin, die einzelnen Planelemente in zweckmäßiger Weise und unter ökonomischen Gesichtspunkten auszuwählen, möglichst so, daß sie einer allgemeinen Formulierungssprache also etwa ALGOL entsprechen.

Plangleichung:

$$a - b + c \cdot (d + e) - \sin(a + b) \Rightarrow Z$$

ZvD

Rechenplan		Komb. mit Mark.	Gedächtniszellen				RR	Sprung oder Ab- speiche- rung
Nr.	Plan- element		1.	2.	3.	...		
0	Anfang		0	A				
1	a						a	
2	—	A	$0 + a$	S				
3	b						b	
4	+	S	$a - b$	A				
5	c						c	
6	\times			c	M			
7	(0	A		
8	d						d	
9	+	A			$0 + d$	A		
10	e						e	
11)	A					$d + e$	
		M					$c \cdot (d + e)$	
12	—	A	$a - b + c \cdot (d + e)$	S				
13	\sin			n	F			
14	(0	A		
15	a						a	
16	+	A			$0 + a$	A		
17	b						b	
18)	A					$a + b$	
		F						$\Rightarrow n$
				$n + 1$				
				19				$\rightarrow n + 1$
					0	A		
$n + 1$...			Unterplan „sin“					
$n + m$	Rückkehr	A					$\sin(a + b)$	
								$\rightarrow 19$
19	\Rightarrow	S					$a - b + c \cdot (d + e) - \sin(a + b)$	
20	Z							$\Rightarrow Z$

Bild 15

Das Ziel, das am Ende dieser Entwicklungsrichtung steht, sollte einen breiten Kreis gerade von Mathematikern auf den Plan rufen:

Erst damit wird der Mathematiker mit seinen Problemen wieder in direkten Kontakt zu den Rechenautomaten kommen, die er z. Z. nur auf dem Umweg über umfangreiche, kostspielig herzustellende und auch keineswegs voll befriedigende Übersetzungsprogramme meistern kann.

Lassen Sie mich noch auf die zu Anfang gemachten Bemerkungen zurückkommen. Es existieren zahlreiche Rechenanlagen der klassischen Struktur, dies bedeutet hohe Investitionen. Es ist sehr viel Kraft eingesetzt worden, um Übersetzungssprachen für breiteste Anwendungsbereiche zu schaffen. Man hat darin große Erfolge zu verzeichnen. In Auswirkung dieser Arbeiten

hat man gelernt, die Rechenautomaten hinsichtlich ihrer logischen Struktur auch einfacher zu halten, wobei man wiederum mehr Lasten in die Programmierung oder die Übersetzungssprachen zu nehmen bereit ist. Dies ist die eine Entwicklungsrichtung.

Demgegenüber steht die in diesem Vortrag umrissene Tendenz, eine logisch und damit auch technisch kompliziertere Struktur der Automaten in Kauf zu nehmen, damit aber Maschinen zu besitzen, die mit dem Mathematiker die gleiche Sprache benutzen; für deren Einsatz wenigstens im Fernziel besondere Programmierungsarbeiten entfallen. Für Routinearbeiten werden diese Anlagen hinsichtlich der Rechengeschwindigkeit nachstehen; ihre Überlegenheit werden sie bei ständig wechselnden Problemstellungen zeigen, da die Kontrolle neuer Programme hier leichter durchführbar sein wird, als dies bei einer auf Übersetzungsmethoden beruhenden automatischen Programmierung möglich ist.

Beide Entwicklungsrichtungen haben nebeneinander ihre Berechtigung.

Anschrift: Dr. W. KÄMMERER, Jena, Sonnenbergstr. 6

Automatisches Programmieren auf ZRA 1

Von IMMO O. KERNER*)

1. Einleitung

Nachdem programmgesteuerte Rechenautomaten den Menschen von arithmetischer Routine- bzw. Massenarbeit befreit hatten, stellte sich sehr bald heraus, daß ihm eine andere Arbeit, das Programmieren, auferlegt worden war. Jeder, der schon einmal ein hinreichend kompliziertes Problem für irgendeinen Automaten in der diesem verständlichen Sprache aufgeschrieben hat, wird dies bestätigen. Man hat sich nicht nur mit arithmetischen Befehlen zu befassen, sondern vielmehr mit den Adressen für die Operanden. Da derjenige Automat als der bessere anzusehen ist, der nicht nur immer wiederkehrende Probleme rasch zur Lösung führt, sondern dies auch für erstmalig vorliegende Aufgaben zu leisten in der Lage ist, und da die Programmierzeit für letzteres entscheidend in die Bearbeitungszeit eingeht, mußte eine Abhilfe geschaffen werden. Der heutige Stand ist, daß der Programmierer das Problem in einer Sprache niederschreibt, die der mathematischen weitgehend angeglichen ist, und daß der Automat dann dieses selbst in die ihm eigene Maschinensprache überträgt. Eine sich bereits durchsetzende Formulierungssprache ist die „Algorithmische Sprache ALGOL“. Die im „ALGOL-Bericht 60“ enthaltenen Zeichen und Regeln wurden zur Anfertigung eines ALGOL-Übersetzers in die Programmierungssprache des Zeiss-Rechen-Automaten ZRA 1 benutzt. Im vorliegenden kleinen Bericht sind naturgemäß Kürzungen nötig. Es wird hier nur der Fall von Ergibtanweisungen unter Verwendung der Basissymbole

$\langle \text{Buchstabe} \rangle := a | b | c$

$\langle \text{arithmetischer Operator} \rangle := + | - | \times | /$

$\langle \text{Trennzeichen} \rangle := ; | :=$

$\langle \text{Klammer} \rangle := (|)$

behandelt. Es kann hier nicht näher auf diese Zeichen eingegangen werden und es sei nur auf das ALGOL Bulletin Supplement No. 2 hingewiesen (herausgegeben von P. NAUR, Valby Dänemark).

2.0 Struktur des ZRA 1

Beim Anfertigen eines ALGOL-Übersetzers für eine spezielle Maschine müssen natürlich die Besonderheiten dieser Maschine berücksichtigt werden. Es ist hier nicht Raum genug, die Struktur des ZRA 1 ausführlich zu besprechen; nur das Wichtigste sei vermerkt.

Der ZRA 1 hat ein vierfach unterteiltes Befehlswort: Rechen-, Test-, Transport- und Adressenteil. Diese Teile werden parallel so abgearbeitet, daß effektiv die Reihenfolge

Adressenteil

Speichern

Testteil

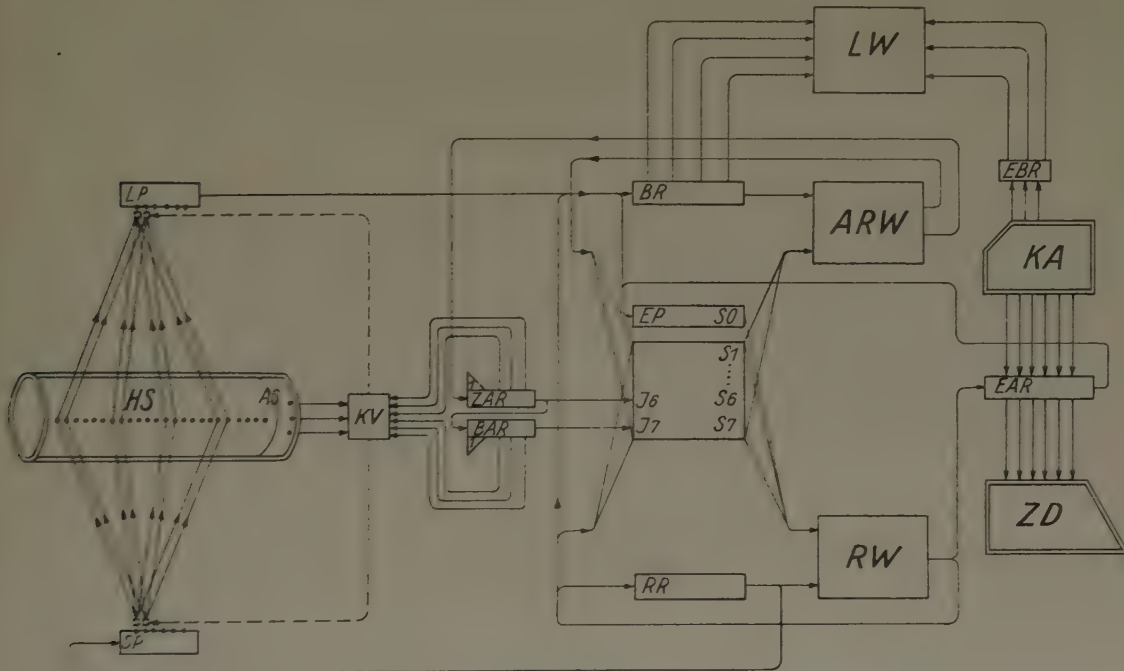
Rechenteil

Transportteil (ohne Speichern)

entsteht. Die 7 Indexregister J 1 — 7 werden hier nicht als Schnellspeicher benutzt. Die Adresse bildet sich nach der Regel $\langle \text{ZAR} \rangle := \text{Datum} + \langle \text{JA} \rangle_{\text{ad}}$ im Adressenrechenwerk ARW und läuft nach dem Zahlaufrufregister ZAR.

*) Zentralinstitut für Automatisierung, Jena.

Indexoperationen verändern den Inhalt des Indexregister JA, indem sie ihn um 1 oder um das Datum vergrößern. Die Rechnung wird modulo 4096 durchgeführt. Es existiert die Möglichkeit der automatischen Adressensubstitution, welche durch * befohlen wird. Beim Transportbefehl I „lies“ wird der Inhalt der durch ZAR angegebenen Hauptspeicherzelle (HS) nach dem Eingangspuffer (EP) überführt. Beim Speichern S wird der Inhalt des Resultatsregisters (RR) auf den Hauptspeicher gebracht. Beim Sprung \rightarrow wird der Inhalt des ZAR nach dem Befehlsaufrufregister (BAR) überführt und der Inhalt der angerufenen Zelle gelangt nach dem Befehlsregister (BR). Beim Sprung mit Rückkehrabsicht R wird erst noch der alte Inhalt des Befehlszählers BAR nach J 7 gebracht. Bei arithmetischen Operationen steht der erste Operand immer im RR, der zweite im EP. Dabei können die Vorzeichen der Operanden variiert werden. Beim Übertragen Ü gelangt der Inhalt des angegebenen Registers nach RR. Zahlen und Befehle können zweifach bzw. einfach markiert werden. Die Markierungsteste erfolgen im EP. Das Eingabemedium ist die Lochkarte. Die Eingabesteuerung ist von der Programmabarbeitung getrennt. Die Eingabebefehle stehen als Kennzeichen beim einzugebenden Wort. Übergang von einer Steuerungsart in die andere ist mit dem Befehl „Halt, Übergang“ H \rightarrow möglich.



Vereinfachtes Blockbild des ZRA 1

2.1 Adressenfreies Programmieren

Die beim Programmieren am meisten störende Eigenschaft programmgesteuerter Rechenautomaten ist diejenige, daß Größen oder Variable nur über Adressen zugänglich sind. Die Grundkonzeption der Programmsteuerung gestattet aber, dieses auf dem Wege der symbolischen Adressen zu umgehen. Trotz der getrennten und nicht mehr erweiterbaren Eingabesteuerung des ZRA 1 ist es möglich, adressenfrei zu programmieren.

Es sind dazu die Befehle, welche eine symbolische Adresse haben, mit Q zu markieren und vor der Eingabe des Wortes, auf welches sich die symbolische Adresse bezieht, sind einige Zeilen einzufügen, die das Anlegen eines Adreßbuches unter Verwendung eines Unterprogramms veranlassen. Nach Beendigung der Eingabe mustert ein zweites Unterprogramm die Befehlsreihe auf Q durch und ersetzt die symbolischen Adressen mit Hilfe des angelegten Adreßbuches, ohne den Programmierer weiter zu belasten, durch echte Adressen. Unter einfachsten Voraussetzungen hat das erste Unterprogramm 5 Zeilen, und das zweite hat 9. Liegt beim Durchmustern kein Q vor, so werden von diesen 9 Befehlen nur 3 abgearbeitet. Ein Programm aus 100 Zeilen mit 30 symbolischen Adressen benötigt bei der Eingabe 190 Zeilen. Neben der Eingabezeit von 12 Sekunden werden zur Abarbeitung der 630 Befehle aus beiden Unterprogrammen noch 4 Sekunden benötigt. Dies gilt natürlich nur für den Fall, daß im Programm bei der Eingabe keine Adressenänderungen erster Art durchzuführen sind. Selbstverständlich läßt sich ZRA 1 auch unter solchen Bedingungen adressenfrei programmieren, jedoch sollen kompliziertere Verhältnisse aus den bereits geschilderten Gründen hier nicht erwähnt werden.

2.2 Interpretierende sequentielle Formelarbeit

Es sei nun angenommen, es liege eine Zeichenreihe aus den oben erwähnten ALGOL-Zeichen vor. Die Buchstaben seien Bezeichnungen für einfache Variable und, als symbolische Adressen gedeutet, bereits mit Hilfe des eben beschriebenen Verfahrens durch richtige Adressen ersetzt. Für jedes Zeichen existiert nun ein Unterprogramm und jedes Zeichen ist dem Automaten durch einen Sprungbefehl mit Rückkehrabsicht in das dem Zeichen zugeordnete Unterprogramm verständlich. Dabei hat das Unterprogramm „Variable“ einen Parameter nötig, nämlich die Adresse der Variablen. Das verwendete Verfahren ist darauf aufgebaut, daß eine Reihe von Arbeitszellen (Gedächtniszellen, Kellerzellen) existiert, in denen Zwischenergebnisse mit Angaben der noch zu erledigenden Operationen abgelegt werden. Deshalb werden diese „kombinierten Arbeitszellen“ genannt. Eine Operation wird ausgeführt sobald die Art der Folgezeichen dies zuläßt. Genauer braucht hier nicht darauf eingegangen zu werden, da ein Hauptvortrag dieser Tagung sich auf dies Verfahren bezieht (W. KÄMMERER, Programmierung nach mathematischem Formelbild). Da die Übersetzung in die vom ZRA 1 auszuführenden Befehle im Verlauf der Formelarbeit erfolgt, ist dies ein interpretierendes Verfahren mit all den Nachteilen, die den interpretierenden Verfahren anhaften. Für die den 7 Typen von ALGOL-Zeichen, auf die sich dieser Vortrag beschränkt, zugeordneten Unterprogramme wird ein Speicher von insgesamt 78 Zellen benötigt, so daß auf ein Zeichen durchschnittlich 11 Befehle kommen. Ein Programm aus 100 ALGOL-Zeichen würde bei schleifenloser Struktur demnach in 8 Sekunden erledigt sein.

2.3 Kompilierende sequentielle Formelarbeit

Der Nachteil des interpretierenden Verfahrens, daß das dem Zeichen zugeordnete Unterprogramm immer wieder durchlaufen wird, wenn das Programm auf dasselbe Zeichen stößt, wird beim kompilierenden Verfahren vermieden. Hier stellt der Automat erst in einem Zuge die abzuarbeitende Befehlsfolge her. Wie beim interpretierenden Verfahren ist hier die Methode der kombinierten Arbeitszellen verwendet worden, nur daß in dem den Zeichen zugeordneten Unterprogrammen der tatsächlich rechnende Teil durch einen anderen ersetzt wurde, der ein die Rechnung erledigendes Teilprogramm herstellt und dieses abspeichert. Der Compiler für die 9 ALGOL-Zeichen benötigt 153 Speicherzellen. Die mit ihm hergestellten Programme sind natürlich erheblich länger als die eines menschlichen Programmiers. Ein geeignetes Unterprogramm jedoch erreicht durch Verschachteln der ZRA-1-Befehle eine deutliche Verkürzung.

3. Beispiel, Vergleich und Aufwandabschätzung

Die aus 23 Zeichen bestehende Ergibtanweisung

$$a := a \times (b + c) / (a - b) \times (-c + b);$$

benötigt 13 Befehle bei direkter optimaler Programmierung. Schreibt man sie viermal hintereinander auf, so erhält man eine Reihe von nahezu 100 ALGOL-Zeichen mit ungefähr 30 Variablen. Die Abarbeitung der 52 Befehle direkter Programmierung dauert zwar nur 0,3 Sekunden, jedoch ist die Programmierzeit erheblich. Es war schon gesagt, daß die Rechnung nach dem interpretierenden Verfahren 8 Sekunden dauert. Das Herstellen des Programmes nach dem kompilierenden Verfahren dauert für 100 Zeichen etwa 15 Sekunden. Dabei entsteht erst eine Befehlsfolge von etwa 220 Zeilen, die dann auf 130 verkürzt werden kann, so daß die Abarbeitung gegenüber derjenigen bei direkter Programmierung ungefähr die 2,5fache Zeit beansprucht. Die Programmierzeit ist aber, um es noch einmal zu sagen, auf 15 Sekunden gesunken. Dies sind nur Schätzungen, denn das bisher einzige Exemplar des ZRA 1 konnte für Versuche der geschilderten Art aus Zeitgründen noch nicht benutzt werden.

Literatur

- [1] Der Zeiss-Rechenautomat ZRA 1, Firmenprospekt 37-S 001-1.
- [2] W. KÄMMERER, Programmierung nach mathematischem Formelbild, Jenaer Jahrbuch 1959/II, VEB Gustav Fischer-Verlag.
- [3] K. SAMELSON und L. BAUER, Sequentielle Formelübersetzung, Elektronische Rechenanlagen 1959/IV.

Anschrift: Dipl.-Math. IMMO O. KERNER, Jena, Naumannstr. 7

Rundefreies Rechnen mittels Kongruenzen^{*)}

Von J. KNITTEL und K. ZELLER

Bei manchen numerischen Rechnungen (z. B. gewissen Eigenwertproblemen, vgl. [1]) ist es wünschenswert, Rundefehler völlig zu vermeiden. Man muß dann aber großen Speicherbedarf und sehr lange Rechenzeit in Kauf nehmen. Beide Nachteile lassen sich in gewissem Maß vermeiden, wenn man mit simultanen Kongruenzen rechnet (was schon von SVOBODA und VALACH zur Konstruktion von Rechenwerken benützt wurde, siehe etwa [2]).

Bei der Kongruenzmethode wird eine ganze Zahl z (die Behandlung rationaler Zahlen ist schwieriger) durch ein System von Resten dargestellt:

$$z \equiv r_i \bmod m_i \quad (i = 1, \dots, l) \quad (1).$$

Ist k das kleinste gemeinsame Vielfache der m_i , so bestimmt (1) die Zahl z modulo k ; man muß natürlich k so groß wählen, daß diese Unbestimmtheit bei dem behandelten Problem irrelevant ist. Am einfachsten nimmt man für die m_i Primzahlen (was auch für die Division Vorteile bietet). Bei einer Maschine, die wie die Tübinger Si 2002 mit 12 Stellen arbeitet, wird man etwa die größten unterhalb 10^{12} gelegenen Primzahlen benützen. Wir nennen von einigen dieser Zahlen die 3 letzten Stellen (die 9 ersten sind Neunen):

989, 961, 959, 937, 899, 877, 863, 857, 847, 767, 707, 697, 673, 617, 611, 599, 589, 577, 571, 529, 517, 497, 457, 391, 359, 331, 301, 293, 287, 277, 269, 253, 247, 161, 143, 133, 101, 091.

Addition, Subtraktion und Multiplikation erfolgen nach der einfachen Regel

$$z \pm z' \equiv r \pm r' \bmod m \quad (2).$$

Die Kongruenzen sind unabhängig voneinander, es gibt keine „Überträge“ wie im Dezimalsystem. Insbesondere steigt die Multiplikationszeit nur linear und nicht quadratisch mit der Stellen- bzw. Wortzahl an. Allerdings muß man, sobald einer der nach (2) berechneten Reste mehr als 12 Stellen umfaßt, eine Reduktion vornehmen. Division liefert eine „vollständige Reduktion“, auf $|r| < m$. Wegen $a \cdot 10^{12} \equiv a(10^{12} - m)$ gestatten aber auch Multiplikationen bzw. Additionen schnelle Reduktion auf $|r| < 10^{12}$.

Division ist i. a. nur sinnvoll, wenn $z:z'$ aufgeht. Man führt sie mit der bekannten Kettenbruchmethode durch (siehe etwa [3]). Bei Zahlen der Größenordnung 10^{12} hat der Kettenbruch maximal 60, im Mittel ca. 23 Glieder, was einigen Zeitaufwand erfordert. Verschwinden für ein i sowohl r_i als auch r'_i , so benötigt man zur Bestimmung des betreffenden Restes von $z:z'$ einen zusätzlichen Hilfsmodul (oder andere Hilfsmittel). Aus den genannten Gründen wird man Divisionen möglichst vermeiden.

Die Unabhängigkeit der Kongruenzen gestattet auch in vielen Fällen, die Moduln nacheinander zu behandeln und damit wesentlich an Speicherplatz zu sparen. Andererseits lohnt es kaum, unkritische Teile des Problems mit geringerer Wortzahl (Modulzahl) durchzunehmen, weil die Umrechnung auf ein größeres Modulsystem Schwierigkeiten bereitet.

Um das Endresultat im Dezimalsystem auszudrücken, beschafft man sich dezimale Grundzahlen g_i , bei denen $r_i = 1$ und die anderen Reste Null sind (zur Bestimmung von g_1 berechnet man etwa den Rest von $m_2 \dots m_n$ modulo m_1 usw.). Mit Hilfe der g_i erhält man durch einfache Operationen die gewünschten Dezimaldarstellungen, wobei allerdings Rechnungen mit mehrfacher Genauigkeit im Dezimalsystem erforderlich sind.

Die Kongruenzmethode ist vor allem bei der Behandlung von Matrizen nützlich. Die Eigenwerte einer Matrix A (mit ganzzahligen Elementen) erhält man z. B. über die Werte $\det(A - \lambda I)$ (wo $\lambda = 0, 1, \dots, n$) (vgl. [1]). Diese Determinanten lassen sich rundefrei mittels der Kongruenzmethode auswerten (übliche Eliminationsmethode; Spaltenpivotsuche nach einem Element $\not\equiv 0 \bmod m_i$; gibt es kein solches, so ist die Determinante durch m_i teilbar). Bei der Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ (mit ganzzahligen Koeffizienten; man vgl. auch den divisionsfreien Algorithmus bei ZURMÜHL [4]) errechnet man zuerst die mit $\det A$ multiplizierte Lösung (die ganzzahlig ist). Für den Fall, daß die Determinante durch einige der m_i teilbar ist, wird man Ersatzmoduln bereithalten.

Literatur

- [1] D. B. GILLES, The exact Determination of the Characteristic Polynomial of a Matrix. Vortrag, gehalten auf der ICIP, Paris 1959.
- [2] M. VALACH, Abbildung der Zahlen und der arithmetischen Operationen im Restklassensystem. Bericht über das Internationale Mathematiker-Kolloquium, Dresden 1955, S. 57–59.
- [3] WEBER-WELLSTEIN, Encyklopädie der Elementar-Mathematik I, 1934, S. 241.
- [4] R. ZURMÜHL, Matrizen, 1958, S. 77–78.

Anschriften: Prof. Dr. K. ZELLER, Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dipl.Math. J. KNITTEL, Universität Tübingen, Mathematisches Institut

^{*)} Der Vortrag war angekündigt, konnte jedoch auf der Tagung nicht gehalten werden.

Ein für elektronische Digitalrechner geeignetes Iterationsverfahren zur Lösung eines freien Randwertproblems

Von GERHARD PATZELT

Bei einem *freien Randwertproblem* einer partiellen Differentialgleichung ist im Gegensatz zu einem festen der *Rand selber noch unbestimmt* und muß ebenso wie auch die Lösung der Differentialgleichung erst ermittelt werden. Das hier zu beschreibende Iterationsverfahren wurde an einem Beispiel aus der Lehre der ebenen schallnahen Strömungen erprobt; die Ergebnisse dieser Rechnungen werden am Schluß dieser Arbeit beschrieben.

Die Aufgabenstellung läßt sich bei diesem Lösungsverfahren jedoch wesentlich allgemeiner formulieren:

Gegeben ist eine *lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung*

$$L(\varphi) = 0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

für die Funktion $\varphi = \varphi(u, v)$ von den beiden unabhängigen Veränderlichen u und v . Unabhängig davon, ob die Differentialgleichung vom elliptischen, hyperbolischen oder gemischten Typ ist, wird eine Lösung gesucht, für die auf einer *unbekannten Randkurve* c , die in der Parameterdarstellung

$$u = u(t), \quad v = v(t) \quad \dots \dots \dots (2)$$

bestimmt werden soll, die beiden Randbedingungen

$$f_i(t) \cdot \varphi(u, v) + g_i(t) \cdot \frac{\partial}{\partial u} \varphi(u, v) + h_i(t) \cdot \frac{\partial}{\partial v} \varphi(u, v) = A_i(t) \quad [i = 1, 2] \quad \dots \dots (3)$$

erfüllt sind. Auf der Randkurve c soll dabei noch die Bedingung

$$F(u, v) = B(t) \quad \dots \dots \dots (4)$$

gelten, die sich auch in der Parameterdarstellung

$$u = C(B(t), \alpha(t)), \quad v = D(B(t), \alpha(t)) \quad \dots \dots \dots (5)$$

schreiben lassen soll. Hierbei sind die $f_i, g_i, h_i, A_i, B, C, D$ und F bekannte Funktionen ihrer Argumente, während die Funktionen $\alpha(t)$ und $\varphi(u, v)$ zu bestimmen sind.

Die Lösung $\varphi(u, v)$ soll durch ein Summe bekannter Partikulärlösungen $\varphi_i(u, v)$ der Gleichung (1) angenähert werden:

$$\varphi(u, v) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(u, v) \quad \dots \dots \dots (6)$$

Von der Funktion $\alpha(t)$ sollen dagegen n Werte ermittelt werden, was der Bestimmung von n Punkten der Randkurve entspricht.

Setzt man dies und (6) in die beiden Bedingungen (3) ein, so hat man $2n$ Gleichungen für die $2n$ Unbekannten a_i und α_k . Dabei treten alle a_i in jeder der Gleichungen linear auf, während in je zwei der Gleichungen eine Unbekannte α_k transzendent (in den Argumenten u und v) enthalten ist.

Um dieses Gleichungssystem zu lösen, kann man von Näherungslösungen α_k (die sich bei den Anwendungen aus physikalischen Überlegungen ergeben können) ausgehen und dann das Gleichungssystem (3) z. B. nach dem verallgemeinerten Verfahren von NEWTON lösen. Die erforderlichen Programme können aus einer Anzahl von Unterprogrammen zusammengesetzt werden, die z. T. von den Gleichungen (1), (3) und (5) abhängen.

Ein *Beispiel* eines solchen Randwertproblems tritt bei der Behandlung ebener schallnaher Strömungen auf. Man hat zunächst in der Stromebene nach OSWATITSCH [1] die *nicht-lineare* Potentialgleichung

$$\Phi_x \Phi_{xx} - \Phi_{yy} = 0 \quad \dots \dots \dots (7),$$

die durch die LEGENDRETRANSFORMATION in die (*lineare*) TRICOMISCHE Gleichung überführt werden kann:

$$u \varphi_{vv} - \varphi_{uu} = 0 \quad \dots \dots \dots (8).$$

Die in der x - y -Stromebene vorgegebene Profilkante wird dabei in eine unbekannte Randkurve c der zugeordneten u - v -Hilfsebene (Hodographenebene) überführt, wobei die Bedingung (4) die Form

$$\frac{\beta v}{u + q} = y'(t) \quad [\beta, q \text{ sind Konstanten}] \quad \dots \quad (9)$$

annimmt; y' bedeutet hierbei die Stromrichtung. Die Bedingungen (3) haben jetzt die einfache Gestalt:

$$\frac{\partial}{\partial u} \varphi(u, v) = x(t), \quad \frac{\partial}{\partial v} \varphi(u, v) = y(t) \quad \dots \quad (10).$$

Es wurde nach dieser Methode die Einstromung in eine LAVALDüse untersucht, wobei die Ausgangswerte α_k nach einer zum Vergleich herangezogenen Strömung des 'TRICOMIGases' bestimmt wurden. Es ergab sich ein merklicher Unterschied der α_k -Werte und somit der Stromgeschwindigkeiten der beiden idealisierten Gase bei der Einstromung in dasselbe Profil.

Eine ausführlichere Darstellung dieser noch im Gange befindlichen Untersuchungen soll später erfolgen.

Literatur

- [1] K. OSWATITSCH, Die Geschwindigkeitsverteilung an symmetrischen Profilen beim Auftreten lokaler Überschallgebiete, Acta Physica Austriaca (1950).

Anschrift: Dr. G. PATZELT, Aachen, Schönforstwinkel 5

Ein Verfahren zur Ermittlung optimaler Reihenparallelschaltungen

Von H. ROHLEDER

Eine ausführliche Darstellung erscheint in der „Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik“.

Adressierprogramme^{*)}

Von F. SCHWENKEL und K. ZELLER

Beim Automatischen Programmieren denkt man heute hauptsächlich an Formelübersetzer, während die Entwicklung von Montage-(assembly-)Programmen ziemlich abgeschlossen ist. In der Praxis haben solche Systeme bis hinab zu den einfachen Adressierprogrammen vor allem dann noch Bedeutung, wenn sie speziellen Maschineneinrichtungen angepaßt sind, die von den Formelübersetzern nicht ausgenutzt werden. Ihre wesentliche Leistung ist die Erledigung aller Numerierungen, Adressen-Ermittlungen und -Einsetzungen, so daß die problemfremden Maschinenadressen aus dem „Rohprogramm“ verschwinden.¹⁾ Man kommt so zu einer maschinenorientierten Symbolsprache, die zwar für viele Zwecke zu umständlich erscheint, aber dafür universell ist und für das Testen den Vorteil hat, daß jeder Maschinenschritt in ihr verzeichnet ist. Fehler-suche und Korrektur kann man daher normalerweise anhand des Rohprogramms bewerkstelligen, notfalls unterstützt durch ein (vom Übersetzungsprogramm ausgedrucktes) „Adreßbuch“, d. h. eine Liste der symbolischen Adressen und ihrer numerischen Äquivalente. Man kann somit ein Adressierprogramm auch als reines Eingabeprogramm anlegen²⁾.

Auf dem Tübinger Siemens-Rechner 2002 (Einadreß-Dezimal-Maschine mit fester Wortlänge, 2000 + 10000 Speicherplätzen, 4 Indexregistern, Lochstreifen-Ein- und Ausgabe) wurden einige Erfahrungen mit solchen Programmen gesammelt, über die hier berichtet werden soll.

Eine Instruktion in einer symbolischen (Einadreß-)Maschinensprache besteht aus mehreren Feldern für Operation, Datenadresse, Sonderzwecke (wie Markierung, Indexregisterbenutzung) und einem weiteren Feld für eine eventuell zugeordnete Bezugsadresse (das „Merkmal“ der Instruktion).

^{*)} Der Vortrag war angekündigt, konnte jedoch auf der Tagung nicht gehalten werden.

¹⁾ Zur allgemeinen Orientierung verweisen wir auf den Artikel von J. W. CARR III in: Handbook of Computation and Control, vol. 2, chap. 2, p. 2-155—2-167 (1958).

²⁾ Z. B.: TH. FROMME, Ein Adressierprogramm für die Z 22, Elektronische Datenverarbeitung 1 (1959), S. 49 ff. Im Siemens-PROSA-System für den Rechner 2002 ist der Gesichtspunkt ebenfalls stark betont.

Die Übersetzung der Datenadressen wird meist mit Hilfe eines besonderen Adreßbuchs bewirkt, das während des Einlesens aus den Bezugsadressen zusammengestellt wird. Mit Rücksicht auf einfache Korrekturen ist es aber bei kurzen Programmen vorzuziehen, die Instruktionen samt ihren Merkmalen unverändert oder nur wenig verändert einzulesen, so daß die Lage der Merkmale im Speicher zugleich ihr numerisches Äquivalent angibt. Die Nachteile des Verfahrens sind der große Platzbedarf des Rohprogrammspeichers und die Notwendigkeit, bei jeder Adressenermittlung das ganze Rohprogramm abzusuchen.

Einschieben neuer Befehle bei der Korrektur kann man dadurch ermöglichen, daß man das Rohprogramm durch Vorschreiben vorläufiger Speicheradressen auseinanderzieht. In die entstehenden Lücken dirigiert man — ebenfalls mit Hilfe der vorläufigen Speicheradressen — die einzuschiebenden Befehle hinein. Unmittelbar vor der Übersetzung wird dann das Rohprogramm wieder zusammengeschoben. Dieses einfache System gestattet auch explizite Adressendefinitionen u. a. Die vorläufigen Speicheradressen bilden jedoch im Rohprogramm einen Fremdkörper, weshalb wir es jetzt vorziehen, auch bei den Korrekturen symbolische Adressen zu benutzen und Lücken nur im Bedarfsfall schaffen zu lassen. — Wichtigste Fehleranzeige ist die Feststellung nicht eindeutig definierter symbolischer Adressen.

Vom Standpunkt der leichten Erlernbarkeit erscheint eine möglichst einfache Ausstattung der Adressiersysteme als das gegebene. Bei langdauerndem, intensivem Gebrauch tritt dieser Gesichtspunkt jedoch zurück und es empfehlen sich verschiedene Ausbaumöglichkeiten, von denen wir einige nennen:

1. Bewahrt man das Rohprogramm in einem Hilfsp Speicher auf, so können *Korrekturen* während des Tests mit Hilfe des Adressierprogramms vorgenommen werden. Gegenüber der direkten Korrektur des übersetzten Programms hat dieser Umweg den Vorteil, daß alle in Mitleidenschaft gezogenen Adressen automatisch richtiggestellt werden. Nebenbei entsteht im Rohprogrammspeicher eine „Reinschrift“ des symbolischen Programms, die man sich nach dem Test ausdrucken lassen kann.

2. Aus verschiedenen Gründen sollte jedes Programm mit einem nicht zu spärlichen *Kommentar* versehen sein. Das Minimum besteht in einer übersichtlichen Gliederung durch Leerzeilen. Einen wesentlichen Fortschritt bedeutet die Verwendung beliebig langer symbolischer Adressen mit dem Charakter von Schlagworten. Endlich kann man in den Instruktionen ein Feld für — erforderlichenfalls mehrzeilige — Kommentare vorsehen. Für den Programmierer ist es offenbar am bequemsten, wenn er die Kommentare gleich bei der Niederschrift des Rohprogramms anbringen kann. Wenn es der Speicherplatz erlaubt, bedeutet es daher eine große Erleichterung, die Kommentare im oder neben dem Rohprogramm (auch während des Tests) mitzuführen, so daß man sie beim Ausdrucken des übersetzten Programms und der Reinschrift des Rohprogramms wieder einfügen kann. Schließlich ist noch die Möglichkeit einer „automatischen Kommentierung“ zu erwähnen, etwa durch Hervorheben von Aus- und Einsprünge n im Druckprotokoll oder — nach dem Vorschlag von Scott³⁾ — durch automatisches Beifügen der Sprungfeile, was das Zeichnen von Flußdiagrammen zum Teil ersetzt. Besonders beim Studium fremder Programme kann man sich dieses Verfahren zunutze machen.

3. Die automatische Zuweisung von Adressen ist manchmal unerwünscht oder unmöglich. So sind z. B. beim Zusammenschließen getrennt bearbeiteter Stücke eines größeren Programms oder zur Reservierung von Speicherblöcken „*Zwangsadressen*“ nützlich⁴⁾.

4. Bei Maschinen mit komplizierteren Einrichtungen zur Adressenbehandlung (bei der Si 2002: Adressensubstitution und Verwendung des Befehlszählers als Indexregister) treten *zusammengesetzte symbolische Adressen* vom Typ $A + B - C$ auf (wobei A, B, C Adressensymbole oder Zahlen sind).

5. Die Bereitstellung einfacher synthetischer Befehle braucht den Rahmen eines Adressierprogramms nicht zu überschreiten. Am wichtigsten scheinen *Direktoperationen* zu sein (bei denen der Operand direkt im Datenadreßfeld steht⁵⁾). Ähnliches gilt für die automatische Platzierung von Hilfszellen.

6. Bei größeren Montagen ist man u. U. auf die Möglichkeit angewiesen, für verschiedene Programmblöcke getrennte Adreßbücher zu führen oder die symbolischen Adressen in den verschiedenen Programmblöcken mit verschiedenen „*Titeln*“ zu versehen⁴⁾. Adressen, die innerhalb des gerade bearbeiteten Blocks unauffindbar sind, können vom Übersetzer selbsttätig in den übrigen Blöcken gesucht werden.

³⁾ A. E. SCOTT, Automatic Preparation of Flow Chart Listings, Journal of the A. C. M. 5, 1, (1958), p. 57—66.

⁴⁾ SAP-System der SHARE-Organisation für den IBM-Rechner 704 (kurze Darstellung bei Carr, a. a. O.)

⁵⁾ In den IBM-Rechner 1620 sind zahlreiche solche Operationen eingebaut. Die Indexregisterbefehle größerer Maschinen fallen größtenteils auch in diese Kategorie.

7. Ein Adressierprogramm muß reine *Maschinensprache* lesen können (z. B. zum Einbau von Bibliotheksprogrammen), außerdem sind Erleichterungen für die Eingabe von Zahlen (z. B. Gleitkomma-Zahlen) und Klartext erwünscht⁴).

Die Adressierprogramme sollten die verschiedenen Bestandteile des Rohprogramms (z. B. Befehle, Kommentare, Zwangsadressen, Maschinensprache, Klartext) soweit als möglich aus dem Zusammenhang erkennen, damit die Zahl der nur für das Leseprogramm bestimmten Hinweise (z. B. Trennungszeichen, Anweisungen) klein gehalten werden kann; d. h. man sollte ein „*natürliches Schriftbild*“ anstreben. Soweit besondere Anweisungen notwendig sind, ist die äußere Form von Instruktionen anderen, aus dem gewohnten Schema fallenden Zeichenfolgen und willkürlich gewählten Sonderzeichen vorzuziehen⁴).

Einige der aufgezählten Erweiterungen beeinträchtigen jedoch die Fehlersuche und Korrektur, andere erfordern beträchtlichen Aufwand oder erschweren das Erlernen des Systems. Wir haben daher anfangs diese Wünsche nur teilweise berücksichtigt; am wichtigsten erschien uns — vor allem bei Lochstreifen-Eingabe — leichte Korrekturmöglichkeit.

Die Schreibarbeit beim Rohprogramm läßt sich auf verschiedene Arten reduzieren: kürzere Adressen, Abkürzungen für Standard-Befehle, Preisgabe der Spalteneinteilung, andere Gruppierung der Befehls-Bestandteile als in der Maschinensprache, u. a. Beim Fernschreiber ist dabei immer an die störende BU-ZI-Umschaltung und das Fehlen eines Tabulators zu denken. Außerdem sollte nach Möglichkeit ein bestimmter Schreibrhythmus eingehalten werden können.

Zum Schluß einige Andeutungen, die in das Gebiet der Übergänge zwischen Adressierprogrammen und Formelübersetzern gehören: Verwendet man kurze symbolische Adressen und für den Operationsteil Symbole wie $+$, $-$, \cdot , $:$, so kommt man zu formelähnlichen Programmen. Ein Schritt weiter führt zu einem kleinen Formelübersetzer, der zwar keine Klammern auflöst, aber indizierte Adressen auf einfache Weise auswertet: Eine Symbolfolge wie $+ a i j 1$ wird dabei so interpretiert, daß zunächst aus dem Inhalt der Zellen a, i, j und der Zahl 1 in einem Indexregister eine Adresse additiv gebildet und dann mit dieser Adresse ein Additionsbefehl durchgeführt wird. Man könnte dabei auch gleich Dimensionen (etwa der Matrix a_{ij}) berücksichtigen. Maschinen mit solchen Einrichtungen würden das Schreiben von ALGOL-Übersetzern sehr erleichtern. (Daneben könnte man sich noch bessere Möglichkeiten zur Zeichenverarbeitung und zur Markierung von Worten wünschen).

Anschriften: Prof. Dr. K. ZELLER, Universität Tübingen, Mathematisches Institut
F. SCHWENKEL, Universität Tübingen, Mathematisches Institut

Ein Automat mit gekennzeichneten Worten

Von KARL-HEINZ WERLER

Um die vom Mathematiker in seiner Formelsprache formulierten Probleme direkt im Rechenautomaten verarbeiten zu können, ohne einen großen Arbeitsaufwand in die Programmierung stecken zu müssen, zeichneten sich zwei Wege ab:

1. Die Schaffung von Programmiersystemen, von Superprogrammen, die dem Menschen den größten Teil der simplen Programmierungsarbeit abnehmen und dem Automaten aufbürden und die in der Formulierungssprache aufgeschriebene Programme in die Ausführungssprache irgendeines Automaten übersetzen.

2. Der zweite Weg ist die Änderung der Struktur der Rechenautomaten dahingehend, daß ihnen die mathematische Formulierungssprache als Ausführungs-, als Maschinensprache eigen ist.

Hier wird eine Variante dieses zweiten Weges erläutert. Die Aufgabe kann noch einmal mit folgenden Worten umrissen werden:

Es soll ein Automat entworfen werden, der Programme verstehen und ausführen kann, die in einer der mathematischen Formelsprache ähnlichen oder gar mit ihr identischen Formulierungssprache aufgeschrieben sind, ohne daß dabei ein Übersetzerprogramm verwendet wird.

Über die Frage, welche Formulierungssprache gewählt wird, soll hier nicht gesprochen werden, es soll hier nur das Prinzip dieses Automaten angegeben werden.

Fünf Punkte charakterisieren im wesentlichen die Struktur dieses Automaten:

1. Die im Automaten verwendeten Worte werden in Klassen eingeteilt.
2. Die Klasseneinteilung erfolgt durch Hinzufügen von Kennzeichen zum Wort.
3. Diese Kennzeichen und damit die Wortklasseneinteilung muß dem Automaten erkennbar sein.
4. Jeder Wortklasse ist eine ihr zugeordnete Abarbeitungsvorschrift zugehörig.
5. Diese den Wortklassen zugeordneten Abarbeitungsvorschriften können durch Erfüllung oder Nichterfüllung gewisser Bedingungen im Automaten variiert werden.

Die hier angegebene Wortstruktur bedingt eine Abkehr von der dem konventionellen Automaten zugrundeliegenden Befehlswortheilung in Operationsteil und Adressenteil. Diese beiden Teile, die in dem Automaten unterschiedlich behandelt werden müssen, müssen streng getrennt werden. Beide Teile, Operationsteil und Adressenteil, bilden in dem hier zu beschreibenden Automaten eigene Wortklassen mit eigenen und untereinander verschiedenen Abarbeitungsvorschriften. Mit dieser Trennung von Operationsteil und Adressenteil ist der erste Schritt in Richtung auf die Programmierung nach mathematischem Formelbild getan.

Zwar findet sich bei den konventionellen Automaten auch schon eine Einteilung der verwendeten Worte in Klassen, in die Klasse der Befehle und in die Klasse der Zahlen, sowie auch eine unterschiedliche Verarbeitung beider Teile. Der Unterschied gegenüber dem hier zu beschreibenden Automaten liegt darin, daß beim konventionellen Automaten dieser den Unterschied zwischen Befehl und Zahl überhaupt nicht feststellen kann, denn diese beiden Teile unterscheiden sich für ihn überhaupt nicht. Daß aber nun wirklich ein Befehl als Befehl und eine Zahl als Zahl verarbeitet wird, wird vom festliegenden Abarbeitungsschema und den im Befehlsword stehenden Adressen reguliert.

Die im Adressenteil eines Befehls stehende Adresse bestimmt, daß der Inhalt der angegebenen Zelle als Zahl betrachtet und entsprechend behandelt werden muß, ganz gleich, ob dieser Inhalt eine Zahl ist oder nicht. Die Befehlsfolgeadresse (meist Befehlszähler + 1) dagegen bestimmt, daß der Inhalt der angegebenen Zelle als im nächsten Zyklus zu verarbeitender Befehl aufgefaßt wird.

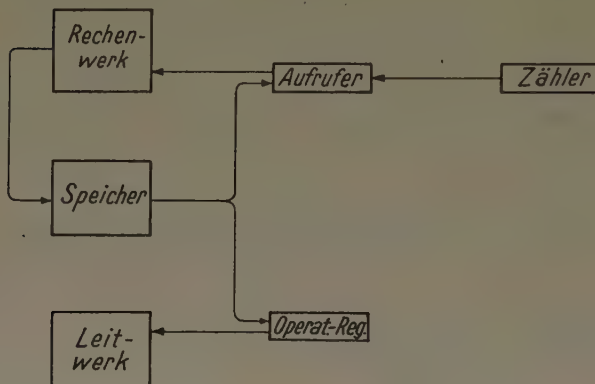


Bild 1

Während also bei den konventionellen Automaten das Abarbeitungsschema bestimmt, wie ein Wort zu verarbeiten ist, ob es als Befehl oder als Zahl aufgefaßt wird, zwingt das mit dem Wort verbundene Kennzeichen im hier zu beschreibenden Automaten diesen dazu, daß das Wort der der Klasse zugeordneten Abarbeitungsvorschrift unterzogen wird.

Jetzt soll das Schema des Automaten angegeben und der Arbeitszyklus an Hand von vier Wortklassen mit ihren Abarbeitungsvorschriften erläutert werden (Bild 1).

Es sind hier nur die für die Betrachtungen wichtigen Teile angegeben. Der Automat besteht aus einem Speicher SP mit dem die Zellenauswahl besorgenden Aufrufer A, der einmal vom Speicher selbst und zum anderen vom Zähler Z gefüllt werden kann. Der Speicherinhalt kann aber auch in das Operationsregister OpR gelangen. Dieses Operationsregister steht mit dem Leitwerk L und der Aufrufer mit dem Rechenwerk RW in Verbindung. Vom Rechenwerk führt noch eine Verbindung zum Speicher zurück.

Es sollen die folgenden vier Wortklassen betrachtet werden:

1. Klasse der Zahlen. Alle zu dieser Klasse gehörenden Worte tragen das Kennzeichen N und werden als Zahlen aufgefaßt und verarbeitet. Es ist in dieser Klasse die Bildung von Unterklassen möglich durch Hinzunahme weiterer Kennzeichen, um z. B. die verschiedenen Zahlendarstellungen zu repräsentieren.

2. Klasse der Adressen. Alle zu dieser Klasse gehörenden Worte tragen das Kennzeichen A. Sie werden als absolute Adressen des Speichers aufgefaßt.

3. Klasse der symbolischen Adressen. Alle zu dieser Klasse gehörenden Worte tragen das Kennzeichen S. Sie werden als symbolische Adressen aufgefaßt, und über ein Adreßbuch, das bei der Eingabe des Programms automatisch angelegt wird, ist die absolute Adresse zugänglich.

4. Klasse der Operationszeichen. Alle zu dieser Klasse gehörenden Worte tragen das Kennzeichen Op. Diese Worte werden als Operationszeichen aufgefaßt; zu ihnen gehören: arithmetische, logische und vergleichende Operatoren und das Ergibtzeichen. Darauf muß man sich bei diesem einfachen Modell des Automaten beschränken.

Auch hier ist eine Bildung von Unterklassen möglich.

- a) Unterklasse der Operationszeichen, die sofort ausgeführt werden können, z. B. Druck.

- b) Unterklasse der Operationszeichen, die erst dann ausgeführt werden können, wenn eine bestimmte Bedingung erfüllt ist, z. B. wenn bei der Operation + der zweite Operand im Rechenwerk aufgetaucht ist.

Der eigentliche Arbeitszyklus ist ein sich ständig wiederholender Lese-prozeß, verbunden mit den Abarbeitungsvorschriften der einzelnen Wortklassen. An den Lese-prozeß schließt sich jeweils die Überführung des gelesenen Wortes in das Operationsregister an, wenn das Wort das Kennzeichen Op trägt, oder es schließt sich die Überführung des Wortes nach dem Aufrufer an, wenn es das Kennzeichen A oder S trägt, bzw. wenn es das Kennzeichen N trägt, erfolgt die Überführung nach dem Aufrufer und weiter nach dem Rechenwerk.

Gehörte das gelesene Wort zur Klasse A oder S, dann wurde der Aufrufer für den neuen Lese-prozeß bereits vorbereitet, während in den beiden anderen Fällen erst $\langle Z \rangle + 1$ gebildet und nach dem Aufrufer gebracht werden muß.

Wie erwähnt, richtet sich die Abarbeitung des Operationszeichens danach, welcher Unter-klasse von Operationszeichen es angehört. Die Abarbeitung wird entweder durch die Überführung in das Operationsregister ausgelöst (Klasse OP a) oder durch die Überführung des zweiten Operanden nach dem Rechenwerk (Klasse Op b).

Ein kurzes Beispiel soll dies noch deutlich machen.

Ich wähle die einfache Ergibtanweisung: $2 \cdot \pi \cdot R = U$.

Mit Kennzeichen geschrieben, wie es dann auf dem Speicher steht, sieht das so aus:

N 2	Op ×	A > π <	Op ×	S R	Op =:	S U	Op ;
-----	------	-------------	------	-----	-------	-----	------

Der Zähler und der Aufrufer stehen so, daß der erste Lese-prozeß das erste Element dieser einfachen Ergibtanweisung liest. Dies ist ein Wort der Klasse N, es gelangt also nach dem Rechenwerk. Es wird $\langle Z \rangle + 1$ gebildet und wieder gelesen. Das Lesen des zweiten Elements bringt ein Operationszeichen hervor, das durch das Kennzeichen Op gesteuert in das Operationsregister gelangt. Es ist ein Multiplikationszeichen, die Operation kann also nicht ausgeführt werden, da der zweite Operand noch fehlt.

Es wird $\langle Z \rangle + 1$ gebildet und gelesen. Dieser Lese-prozeß fördert eine Adresse zu Tage, die in den Aufrufer gelangt. Der Lese-prozeß wird wieder durchgeführt mit der jetzt im Aufrufer stehenden Adresse. Es wird die Konstante π selbst gefunden, die ein Kennzeichen N trägt, so daß dieses Wort ins Rechenwerk gelangt. Stößt der Automat beim Lesen auf eine symbolische Adresse, dann führt der nächste Lese-prozeß auf die absolute Adresse und ein nochmaliger dann auf die Zahl selbst. Während also in einem konventionellen Automaten die in den Formeln direkt auftauchenden Konstanten nur über Adressen zugänglich sind, ist hier die Möglichkeit gegeben, die Konstanten direkt im Programm an der Stelle unterzubringen, wo sie auch in der Formel stehen. Weiterhin besteht die Möglichkeit, in einem Programm sowohl mit absoluten als auch mit symbolischen Adressen zu arbeiten.

Das hier beschriebene Modell eines formelverarbeitenden Automaten ist insofern beschränkt, als die Formeln so abgearbeitet werden, wie sie gespeichert sind, also die Operationszeichen von links nach rechts aufeinanderfolgend verarbeitet werden. Um allgemeine Ergibtanweisungen, durch Klammern beliebig verschachtelt, verarbeiten zu können, muß die Struktur des Automaten durch Hinzufügung eines „Automatischen Gedächtnisses“, wie es das erste Mal von KÄMMERER angegeben wurde, erweitert werden. Hier ergab sich zwangsläufig, durch die Struktur des Automaten bedingt, eine Trennung in ein automatisches Gedächtnis für die Operationszeichen (zu Op. Zeichen gehören auch die Klammern, Begrenzer usw.) ähnlich dem Symbolkeller bei BAUER-SAMELSON, und in ein automatisches Gedächtnis für die Zahlen, ähnlich dem Zahlkeller bei BAUER-SAMELSON, nur mit dem Unterschied, daß hier im automatischen Gedächtnis für Zahlen sowohl Worte der Klasse Zahlen als auch der Klasse Adressen und der Klasse symbolische Adressen auftauchen können.

Das automatische Gedächtnis ist hier so aufgebaut, daß das Abspeichern eines Wortes im Gedächtnis alle darin befindlichen Worte um eine Stufe tiefer in das Gedächtnis befördert, so daß es selbst an der obersten Stufe stehen bleibt und als einziges Wort des Gedächtnisses zugänglich ist. Beim Herausholen des zugänglichen Wortes rücken alle andern wieder eine Stufe nach oben.

Neben der Änderung des Blockbildes ergibt sich auch eine Änderung der Abarbeitungsvorschriften für die Wortklassen (Bild 2).

Der Arbeitszyklus ändert sich wie folgt:

Alle Worte der Klassen N, A, S gelangen nach dem Lese-prozeß über den Aufrufer in das Zahlengedächtnis, dann wird der Zähler um eins erhöht und der Lese-prozeß kann wieder beginnen. Die Worte der Klasse Op gelangen nach dem Operationsregister. Hier wird zusammen mit der im Gedächtnis zugänglichen Operation entschieden, ob diese im Gedächtnis stehende Operation aus-

geführt werden kann oder nicht. Wenn diese Operation nicht ausführbar ist, wird die im Op-Reg. stehende Operation auch in das Operationsgedächtnis gebracht, der Zähler um eins erhöht und wieder gelesen.

Ist diese Operation dagegen ausführbar, dann wird der erste Operand aus dem Zahlengedächtnis nach dem Aufrufer geholt. Ist dieses Wort eine Adresse, wird der Operand durch einen, bei einer symbolischen Adresse durch zwei Lesevorgänge herangeholt und ins Rechenwerk gebracht.

Ist dagegen das Wort aus dem Zahlengedächtnis eine Zahl, dann gelangt sie vom Aufrufer sofort in das Rechenwerk. Ebenso ist der zweite Operand zu holen. Dann wird die Operation ausgeführt, das Ergebnis gelangt in das Zahlengedächtnis.

Jetzt wird geprüft, ob die nächste, im Operationsgedächtnis nach oben gerückte Operation auch ausführbar ist, usw.

Zum Schluß sei noch erwähnt, daß Programme für den ZRA 1 vorbereitet wurden, die die Arbeitsweise dieses Automaten nachbilden. Dadurch wurde die Möglichkeit gegeben, diesen Entwurf experimentell zu überprüfen. Zum anderen wird dadurch gleichzeitig ein Übersetzungssystem für den ZRA 1 erhalten, das mit gekennzeichneten Worten arbeitet.

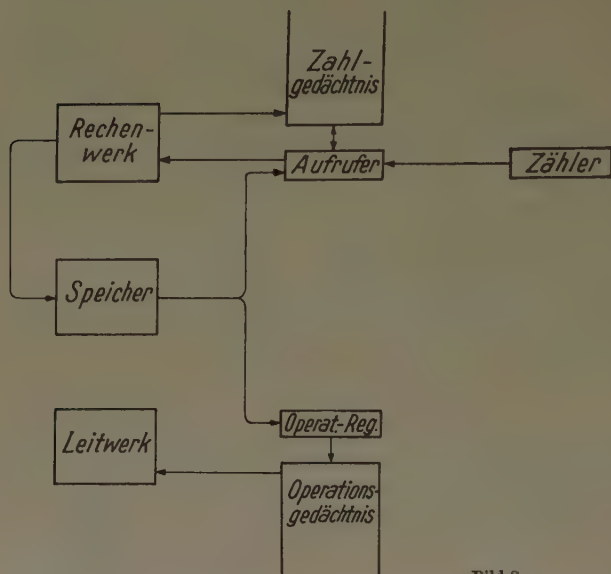


Bild 2

Literatur

- W. KÄMMERER, Ziffernrechnenautomat mit Programmierung nach mathematischem Formelbild, Jenaer Jahrbuch 1959/II.
 F. L. BAUER und K. SAMELSON, Sequentielle Formelübersetzung, Elektron. Rechenanlagen 4 (1959), S. 176 bis 182.

Anschrift: KARL-HEINZ WERLER, Zentralinstitut für Automatisierung, Jena, Carl-Zeiss-Str. 1

C. WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG UND STATISTIK

Einführung in die Informationstheorie*)

Von KONRAD JACOBS

§ 1. Heuristische Betrachtungen

Das zentrale Problem der Informationstheorie läßt sich kurz folgendermaßen umreißen: Gegeben sei eine aus Sender und Empfänger (Mund und Ohr, Mikrophon und Lautsprecher oder dgl.) bestehende Vorrichtung zur Übermittlung von Nachrichten, ein sog. Kanal; in der Vorrichtung treten Störungen statistischer Natur auf (Rauschen), die es unmöglich machen, am Ende des Kanals exakt zu bestimmen, welche Nachricht in den Anfang des Kanals gegeben wurde; vielmehr soll angenommen werden, daß jeder derartige Identifizierungsversuch mit gewissen Fehlerwahrscheinlichkeiten belastet ist; gewünscht wird eine vollständige Behandlung all der Probleme, die sich aus der Aufgabe, diese Fehlerwahrscheinlichkeiten möglichst klein zu machen, ergeben.

Die mathematische Untersuchung eines dergestalt von der Empirie her gestellten Problems hat immer folgenden Charakter: Man stellt ein mathematisches Modell für den empirischen Vorgang auf und prüft, ob sich aus den — rein mathematisch zu untersuchenden — Eigenschaften des Modells Anweisungen für praktisches Verhalten oder eine Bestätigung empirisch

*) Auf Einladung der Tagungsleitung gehaltener Hauptvortrag.

gefundener Sachverhalte gewinnen lassen. Gelingt das, so kann man sagen, daß diese Sachverhalte eine logische Folge derjenigen Eigentümlichkeiten des empirischen Vorganges sind, die man in das Modell hineingesteckt hat; das Modell hat sich dann als brauchbar erwiesen. — Um zu brauchbaren Modellen zu gelangen, muß man die realen Vorgänge schematisieren. Wir wollen diese Schematisierung für das eingangs umrissene Problem in einem Beispiel andeuten.

Ein Telefonist sitzt in einer Kabine. Es werden ihm laufend Telegrammtexte auf den Tisch gelegt. Vor ihm steht ein Mikrophon (der Anfang des Kanals), die Leitung führt in einen anderen Raum zu einem Lautsprecher (Ende des Kanals). Die Leitung sei gestört, aus dem Lautsprecher kommen die in das Mikrophon gesprochenen Worte in verwaschener Gestalt. Der Telefonist hat nun die Aufgabe, seine Texte trotzdem einwandfrei oder wenigstens nur mit geringen Fehlerwahrscheinlichkeiten zu übermitteln. — Hierfür ist ein praktisches Verfahren bekannt: Man buchstabiert und bezeichnet dabei jeden der $a = 24$ Buchstaben durch ein Kennwort (Anton, Berta, . . .); diese Kennworte sind so verschieden, daß sie auch in verwaschener Gestalt noch gut zu unterscheiden sind. Dies Verfahren sichert meist eine fehlerfreie Übertragung, bringt aber eine starke Verzögerung gegenüber dem fließenden Durch-Sprechen mit sich. Die Leistung des Kanals ist stark gemindert. Man kann sie nun wieder anheben, wenn man das stumpfsinnige Buchstabieren durch ein rationelleres Verfahren ersetzt. — Nehmen wir einmal an, jedes Kennwort dauere gesprochen gerade eine sec. In t sec. kann man also eine beliebige Folge von t Buchstaben einwandfrei durchgehen. Offenbar gibt es gerade $24^t = a^t$ derartige Folgen (Wörter). Tröpfeln die Telegrammtexte so langsam herein, daß pro sec. nur ein Buchstabe eingeht, so ist die Übertragung durch einfaches Buchstabieren zu leisten. Fallen die Telegrammtexte mit größerer Geschwindigkeit an, etwa 10 Buchstaben pro sec., was vielleicht einer mäßigen Sprechgeschwindigkeit entsprechen mag, so hilft nur ein Rationalisierungsverfahren, das sich auf die Statistik der Sprache stützt: In t sec. fällt eine Serie von 10 t Buchstaben an; theoretisch gibt es a^{10t} solche Serien (Texte); unter diesen befinden sich aber sehr viele, die sprachlich sinnlos sind; mit einer nahe an 1 liegenden Wahrscheinlichkeit wird nur ein geringer Bruchteil in Frage kommen, eine Auswahl von $b_t < a^{10t}$ Texten etwa. Ist nun für ein passendes t sogar die Relation

$$b_t < a^t \quad (1)$$

erfüllt, so kann man folgendes tun: Man schreibt die b_t in Frage kommenden Texte in ein Buch und neben jeden solchen Text eines der a^t Wörter, derart, daß neben verschiedenen Texten verschiedene Wörter stehen. Solch ein Buch nennt man einen Code. Wenn der Telefonist und der Mann am Lautsprecher beide den Code vor sich haben, ist es klar, daß man mit großer Wahrscheinlichkeit fehlerfrei übertragen kann, und zwar in Etappen der Länge t . — Überschlagen wir noch kurz, wie b_t von t abhängen wird. Für nicht zu kleine t wird man annehmen können, daß die Texte in disjunkten Zeitintervallen der Länge $> t$ unabhängig voneinander auftreten, d. h., daß in zwei aufeinanderfolgenden Zeitintervallen von nicht zu kleinen Längen s und t jede der $b_s b_t$ Kombinationen von in Frage kommenden Texten der Längen s und t in Frage kommt und daß dies im wesentlichen alle in Frage kommenden Texte der Länge $s + t$ liefert. Man wird also ungefähr $b_{s+t} = b_s b_t$ ansetzen dürfen. Dann aber hat man

$$b_t = b^t$$

mit einer Zahl $b < a^{10}$, die i. a. nicht ganz sein wird. Die Relation (1) ist mit $b < a$ gleichbedeutend. Man darf sagen, daß die Sprache um so ärmer ist, je kleiner b ist. Offensichtlich ist die in Telegrammen gebrauchte Sprache sehr arm.

Wir können jetzt erwägen, welche Züge dieser schon stark schematisierten Empirie wir in unser Modell hineinstecken wollen und welche Sätze wir am Modell zu beweisen suchen werden. Wir brauchen

1. ein statistisches Modell für das Anfallen von Texten in einer Sprache. Die Texte sind als Folgen von Zeichen, die einem Alphabet einer Länge a entnommen sind, zu repräsentieren; es müssen Texte beliebiger Länge vorkommen; es kommt nicht darauf an, wie die Zeichen des Alphabets aussehen, man wird annehmen, es handle sich um die Zahlen $1, \dots, a$. Es kommt auch nicht darauf an, wie schnell die Texte gesprochen werden, d. h. die Zeichen aufeinanderfolgen; dies war nur für das Zusammenspiel der Textlieferung mit dem Kanal von Bedeutung, für die interne Statistik der Sprache ist es ohne Belang, mathematisch bedeutet ein Geschwindigkeitswechsel nur das Anbringen eines konstanten Faktors (wie 10). Innerhalb dieses rein kombinatorischen Rahmens wird die Sprache selbst als Wahrscheinlichkeitsverteilung (WV) über die Texte auftreten müssen; die Details der Grammatik sind nur insofern interessant, als sie in dieser WV ihren Niederschlag finden; wir werden deshalb von vornherein nur von der WV sprechen. Sodann wird man hoffen, eine Maßzahl für den Reichtum der Sprache, nach Art der oben erwähnten Zahl b , zu finden; und schließlich wird man versuchen, einen Satz zu beweisen, der etwa be-

sagt, daß man für hinreichend großes t die a^t Texte der Länge t in zwei Gruppen einteilen kann, von denen die erste ungefähr b^t Texte enthält und die zweite eine sehr kleine Gesamtwahrscheinlichkeit hat.

2. ein Modell für den Kanal. Wieder baut man mittels eines Alphabets $1, \dots, a$ einen Vorrat von „Wörtern“ beliebiger Längen, und zwar wird man sich sowohl für den Anfang wie auch das Ende des Kanals je einen solchen Vorrat anlegen. Ist der Kanal frei von Störungen, so wird das Modell für die Übertragung einfach darin bestehen, daß man jedem Wort am Anfang des Kanals das entsprechende Wort am Ende des Kanals zuordnet; dabei werden verschiedenen Wörtern am Eingang verschiedene Wörter am Ausgang zugeordnet, d. h. das Modell besteht einfach in einer eindeutigen Abbildung der Wörter. Ein Modell für einen Kanal, der statistischen Störungen unterliegt, wird dagegen etwa so aussehen: Jedem Wort W am Eingang des Kanals wird ein ganzer Haufen von Wörtern W' am Ausgang zugeordnet (nämlich diejenigen, die man aus dem rauschenden Lautsprecher möglicherweise heraushören kann, wenn W ins Mikrophon gesprochen wurde), aber nicht gleichberechtigt, sondern mit einer Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(W'|W)$ (die meist bei $W' = W$ ein Maximum haben wird): $P(W'|W) \geq 0$, $\sum_{W'} P(W'|W) = 1$.

Diese WV ist der mathematische Ausdruck für die Verwaschenheit, mit der das Wort W am Ende des Kanals erscheint.

Man wird den Begriff des Kennwortes in diesem Modell formulieren und eine Maßzahl für die Leistungsfähigkeit des Kanals bei Verwendung von Kennwörtern suchen.

3. ein Modell für das Zusammenspiel eines Textlieferanten (einer Sprache) mit einem Kanal (also für die Arbeit des Telefonisten mit einem Code). Hierbei ist insbesondere zu erörtern, wie rasch man die Textlieferung laufen lassen darf, damit der Telefonist noch gerade die Übertragung schafft.

§ 2. Theorie des Anfallens von Texten in einer Sprache

Wahrscheinlichkeitstheorie ist Maßtheorie unter speziellen Gesichtspunkten. Um W -Theorie treiben zu können, muß man sich die Grundgegebenheiten einer Maßtheorie verschaffen. Hierzu benötigt man eine sog. Grundmenge $\Omega \neq 0$ und ein System B von Teilmengen E von Ω , denen gewisse Maßwerte $p(E) \geq 0$ als Wahrscheinlichkeiten zugeordnet werden. Natürlich müssen diese Dinge gewissen Bedingungen genügen, die uns hier nicht alle im einzelnen zu interessieren brauchen (z. B. muß B die Mengen 0 und Ω enthalten und gegen die üblichen Mengenoperationen — bei abzählbarer Anwendung — abgeschlossen sein; p muß σ -additiv sein), wir erwähnen nur, daß für jede Zerlegung

$$\Omega = E_1 + \dots + E_n \dots \dots \dots (1)$$

von Ω in Mengen E_i aus B , die paarweise keine Punkte gemeinsam haben, die Relation

$$1 = p(E_1) + \dots + p(E_n) \dots \dots \dots (2)$$

gelten muß. Sind alle diese Bedingungen erfüllt, so nennt man p eine Wahrscheinlichkeitsverteilung (WV) in Ω (genauer: auf B). Bei unserem speziellen Problem sollen Ω und B die rein kombinatorischen Möglichkeiten einer Sprache, die also in der beliebigen Aneinanderreihung von Alphabetzeichen bestehen, widerspiegeln, p dagegen die Statistik der Sprache. Die Texte werden als Elemente von B , d. h. spezielle Teilmengen E von Ω , erscheinen, und $p(E)$ wird die Wahrscheinlichkeit, mit welcher der Text E auftritt, angeben.

Wir nehmen für Ω die Menge aller zweifach-unendlichen Folgen $\omega = (\dots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \dots)$ von irgendwelchen Ziffern des Alphabets $1, \dots, a$. Ein endlicher Text ist kein solches ω , aber man kann ihn durch ein gewisses Bündel solcher ω repräsentieren, genauer: Sei jeder der ganzen Zahlen $s, s+1, \dots, t$ eine Ziffer η_s, \dots, η_t zugeordnet, dann kann man die Menge aller ω mit $\omega_s = \eta_s, \dots, \omega_t = \eta_t$ als den „von s bis t gesprochenen Text η_s, \dots, η_t “ auffassen; wir bezeichnen diese Menge mit (η_s, \dots, η_t) . Durch jedes $\omega \in \Omega$ ist für jedes Zeitintervall s, \dots, t ein Text $(\omega_s, \dots, \omega_t)$, den wir auch mit ${}_s(\omega)_t$ bezeichnen wollen, gegeben; das ist eine Menge von Punkten $\eta \in \Omega$, die außer ω gerade alle die η enthält, bei denen die Ziffern η_s, \dots, η_t mit den Ziffern $\omega_s, \dots, \omega_t$ übereinstimmen. Man wählt nun B so, daß alle erdenklichen Texte $(\omega_s, \dots, \omega_t)$ mit beliebigen $s \leq t$ zu B gehören; bei Beachtung gewisser Minimalitätsforderungen kann man ein solches B nur auf eine Weise wählen. Ω und B geben offenbar alle Möglichkeiten wieder, was das Aussehen und die zeitliche Lage von Texten betrifft.

Die nächste Aufgabe besteht darin, WVen p in Ω , d. h. auf B zu behandeln; es gibt vielerlei Möglichkeiten, solche p wirklich zu konstruieren und ihre $p(\omega_s, \dots, \omega_t)$ auf Texten $(\omega_s, \dots, \omega_t)$ dabei explizit vorzuschreiben — jedenfalls genug, um den statistischen Eigentümlichkeiten einer beliebigen Sprache, die mit einem Alphabet der Länge a geschrieben werden kann, gerecht zu

werden. Da uns im Augenblick nichts daran liegt, eine spezielle Sprache zu untersuchen, sondern nur daran, Eigenschaften beliebiger Sprachen, die nur gewissen sehr allgemeinen Bedingungen genügen müssen, zu untersuchen, wollen wir uns eine WV p einfach als gegeben vorstellen.

Zu den soeben erwähnten allgemeinen Bedingungen soll insbesondere gehören, daß die Sprache ihren statistischen Charakter im Laufe der Zeit nicht ändert, was gegenüber der Wirklichkeit natürlich eine gewisse Abstraktion bedeutet. Mathematisch bedeutet es, daß $p(\omega_s, \dots, \omega_t) = p(\eta_u, \dots, \eta_v)$ ist, wenn $t - s = v - u$ und $\omega_s = \eta_u, \dots, \omega_t = \eta_v$ gilt, d. h., daß die Wahrscheinlichkeit eines Textes nur von seiner Ziffernfolge, nicht aber von seiner zeitlichen Lage abhängen soll. Dies kann man auch noch anderes ausdrücken: Für jedes ganze k kann man eine eindeutige Abbildung T^k von Ω auf sich erklären vermöge

$$(T^k \omega)_t = \omega_{t+k} \quad (\omega \text{ in } \Omega)$$

Es gilt $T^{k+j} = T^k T^j$, die T^k bilden eine zyklische Gruppe von „Bewegungen“ von Ω in sich. p wird bei diesen Bewegungen „mitgenommen“, geht also bei Anwendung von T^k in eine andere WV p_k über: $p_k(E) = p(T^{-k}E)$ (E in B); dies wird sehr anschaulich, wenn man sich p als eine Verteilung der Masse 1 in Ω vorstellt, die durch die Bewegung T^k einfach verschoben wird. Die obige Forderung besagt nun gerade, daß $p_k = p$ (k ganz) ist, d. h. daß p sich bei den Bewegungen nicht verändert oder „invariant“ bleibt. Insbesondere erhält man

$$p_s(T^k \omega)_t = p_{(s+k)(\omega)_{t+k}} \quad (\omega \text{ in } \Omega) \quad \dots \quad (3).$$

Ich diskutiere diese Annahme, p sei invariant, deshalb so ausführlich, weil gerade sie uns ein mächtiges Instrument in die Hand geben wird: die Sätze der Ergodentheorie. Die Situation „ein unter eindeutigen Abbildungen T^k von Ω auf sich invariantes p “ ist gerade die Grundsituation der Ergodentheorie. Doch hiervon später.

Zunächst befassen wir uns mit dem Problem, bei vorgegebenem p eine Maßzahl für den Reichtum der Sprache zu finden. Dies gelingt mittels des Entropiebegriffs. Jeder endlichen Zerlegung (1) von Ω ordnen wir als Entropie die Zahl

$$H = - \sum_{v=1}^n p(E_v) \log p(E_v) = \sum_{v=1}^n z(p(E_v)) \quad \dots \quad (4)$$

mit $z(x) = -x \log x$ ($0 \leq x \leq 1$) zu. Natürlich hängt H von p und von der Zerlegung (1) ab. Wir erwähnen ohne Beweis die einfachsten Eigenschaften:

$$0 \leq H \leq \log n \quad \dots \quad (5).$$

$H = 0$ ist mit „ $p(E_v) = 1$ für ein v , $p(E_\mu) = 0$ sonst“ gleichbedeutend, $H = \log n$ ist mit $p(E_1) = \dots = p(E_n) = 1/n$ gleichbedeutend.

Wir betrachten nun für beliebige feste $s \leq t$ die spezielle Zerlegung von Ω in die sämtlichen Texte der Bauart $E = (\omega_s, \dots, \omega_t)$; sei $Z(s, t)$ das System dieser Texte; dann hat man die disjunkte Zerlegung

$$\Omega = \sum_{E \text{ in } Z(s, t)} E \quad \dots \quad (6),$$

denn jedes ω aus Ω gehört zu genau einem E aus $Z(s, t)$, nämlich zu ${}_s(\omega)_t$. Offenbar hat diese Zerlegung genau $n = a^{t-s+1}$ Teile; bezeichnet man mit $H(s, t)$ die zugehörige Entropie, so gilt nach (5) $0 \leq H(s, t) \leq (t - s + 1) \log a$, also

$$0 \leq \frac{1}{t - s + 1} H(s, t) \leq \log a.$$

Diese Beschränkung ermutigt uns zu der Hoffnung,

$$H = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - s + 1} H(s, t)$$

existiere. In der Tat hängt $H(s, t)$ wegen der Invarianz von p nur von $t - s$ ab, so daß man sich auf den Fall $s = 1$, d. h. die Betrachtung von $t^{-1} H(1, t)$, beschränken kann; aus einfachen Eigenschaften der Entropie (nämlich $H(1, s + t) \leq H(1, s) + H(1, t)$ ($s, t > 1$)) ist leicht die Existenz von

$$H = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} H(1, t) \quad \dots \quad (7)$$

zu folgern. Diese Zahl H wird als mittlere Entropie von p (d. h. der Sprache) bezeichnet. Wir werden sehen, daß H ein brauchbares Maß für den Reichtum der Sprache darstellt. Dies kann man schon wegen (5) und der anschließenden Aussagen vermuten: Ist $p(E) = 1$ für ein

einziges $E \in Z(s, t)$ und $p(E) = 0$ sonst, d. h. kommt mit Wahrscheinlichkeit 1 nur ein bestimmter Text in der Zeit von s bis t vor, so ist die Sprache offenbar so arm wie möglich; und siehe, das ist mit $H(s, t) = 0$ gleichbedeutend. Ist dagegen $p(E) = a^{-t+s-1}$ für alle E aus $Z(s, t)$, d. h. sind alle Texte gleichwahrscheinlich, so ist die Sprache offenbar so reich wie möglich, und siehe, gerade in diesem Fall nimmt $H(s, t)$ den Maximalwert $(t - s + 1) \log a$ an. Die Fälle $H = 0$ und $H = \log a$ treten für passende p auch tatsächlich ein. Die eigentliche Rechtfertigung für H als Maßzahl des Reichtums der Sprache wird aber erst das Folgende liefern.

Zunächst wird der Physiker einwenden, (4) sei gar nicht die Entropie, diese sei vielmehr eine Funktion von E und, bis auf einen Faktor, durch $-\log p(E)$ gegeben. In der Tat wird dieser Ausdruck im folgenden die entscheidende Rolle spielen. Wählen wir nämlich wieder die Zerlegung (6), etwa für $s = 1$, und setzen wir

$$h_t(\omega) = -\frac{1}{t} \log p(\omega_1, \dots, \omega_t) = -\frac{1}{t} \log p_{(1)(\omega)_t},$$

so ist diese Funktion h_t auf jedem E aus $Z(s, t)$ konstant und für ω aus E mit $p(E) = 0$ nicht erklärt; diese E bilden vereinigt eine Menge M mit $p(M) = 0$; man pflegt deshalb zu sagen, h_t sei p -fast überall erklärt. Dies reicht völlig aus, um das Integral $\int h_t dp$ zu berechnen. Da h_t auf E aus $Z(1, t)$ (mit $p(E) > 0$) den konstanten Wert $-\frac{1}{t} \log p(E)$ annimmt, erhält man

$$\int h_t dp = -\frac{1}{t} \sum_{E \in Z(1, t)} p(E) \log p(E) = \frac{1}{t} H(1, t)$$

(7) liefert also

$$\lim_t \int h_t dp = H \quad \dots \dots \dots (8).$$

Entscheidend ist nun, daß man eine viel stärkere Aussage beweisen kann, aus welcher (8) folgt.

Hierzu betrachten wir den bekannten Funktionenraum L_p^2 ; er besteht aus allen Funktionen $g(\omega)$ mit

$$\|g\| = (\int |g|^2 dp)^{1/2} < \infty.$$

Durch

$$(T^k g)(\omega) = g(T^k \omega) \quad (\omega \text{ in } \Omega)$$

erklärt man eine lineare Funktionenabbildung T^k , die wegen der Invarianz von p den Raum L_p^2 in sich überführt; dabei gilt $\|T^k g\| = \|g\|$. Eine Funktion g heißt invariant, wenn $T^k g = g$, genauer, wenn $\|T^k g - g\| = 0$ (k ganz) gilt. Die Konstanten sind gewiß invariant. Welche Funktionen außerdem noch invariant sind, hängt (außer von den T^k) nur noch von p ab. Sind nur die Konstanten invariant, so sagt man, p sei ergodisch. Man hat zahlreiche Möglichkeiten, invariante ergodische p zu konstruieren. Die Annahme, p sei ergodisch, ist im Hinblick auf die Darstellung der Statistik einer Sprache durch p durchaus realistisch; beispielsweise implizieren Unabhängigkeitseigenschaften von der Bauart, wie sie in den heuristischen Betrachtungen des § 1 bei der Herleitung von $b_t = b^t$ erwähnt wurden, stets die Ergodizität. Es gilt nun der

Satz von McMILLAN. Stets existiert genau eine invariante Funktion h in L_p^2 mit

$$\lim_t \|h_t - h\| = 0 \quad \dots \dots \dots (9).$$

Hieraus folgt zunächst

$$\lim_t \int h_t dp = \int h dp$$

also $\int h dp = H$. Ist p ergodisch, so muß $h = \text{const} = \int h dp$, also $h \equiv H$ sein, und wir gewinnen

$$\lim_t \|h_t - H\| = 0 \quad \dots \dots \dots (10).$$

Bevor wir diese Ergebnisse auswerten, sei kurz auf die Beweismittel eingegangen. Es ist

$$\begin{aligned} h_t(\omega) &= -\frac{1}{t} \log p_{(1)(\omega)_t} = -\frac{1}{t} \left(\log \frac{p_{(1)(\omega)_1}}{1} + \log \frac{p_{(1)(\omega)_2}}{p_{(1)(\omega)_1}} + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \log \frac{p_{(1)(\omega)_{t-1}}}{p_{(1)(\omega)_{t-2}}} + \log \frac{p_{(1)(\omega)_t}}{p_{(1)(\omega)_{t-1}}} \right) = -\frac{1}{t} \sum_{k=1}^t \log \frac{p_{(1)(\omega)_k}}{p_{(1)(\omega)_{k-1}}} = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^t g_k(\omega), \end{aligned}$$

wenn man künstlich $p_{(1)(\omega)_0} = 1$ und

$$g_k(\omega) = \log \frac{p_{(1)(\omega)_k}}{p_{(1)(\omega)_{k-1}}} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

festsetzt. Offenbar ist

$$g_k(\omega) = (T^k g_k)(T^{-k} \omega) = T^k \log \frac{p(1(T^{-k} \omega)_{k-1})}{p(1(T^{-k} \omega)_k)} = T^k \log \frac{p(1-k(\omega)_{-1})}{p(1-k(\omega)_0)} = T^k f_k(\omega)$$

mit

$$f_k(\omega) = \log \frac{p(-k+1(\omega)_{-1})}{p(-k+1(\omega)_0)}$$

(wegen (3)). Somit ist

$$h_t = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^t T^k f_k.$$

Der statistische Ergodensatz in L_p^2 stellt die Existenz eines invarianten Limes h für die Ausdrücke der Bauart

$$\frac{1}{t} \sum_{k=1}^t T^k f$$

sicher; man überzeugt sich leicht, daß aus

$$\|f_k - f\| \rightarrow 0 \quad \dots \dots \dots (11)$$

(9) folgen würde. Die Relation (11) kann nun tatsächlich bewiesen werden; man benötigt hierzu nur einfache Aussagen aus der Theorie der sog. Martingale. Die Quelle für den Satz von McMILLAN bildet also die Ergodentheorie, deren Anwendbarkeit durch die Invarianz von p bewirkt wurde.

Wir ziehen nun Folgerungen aus dem Satz von McMILLAN. Dabei soll p als ergodisch vorausgesetzt werden, so daß die Relation (10) gilt.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Die Menge A_t aller ω mit $|h_t(\omega) - H| < \varepsilon$ setzt sich offenbar aus Texten der Bauart $E = (\omega_1, \dots, \omega_t)$ aus $Z(1, t)$ zusammen, weil H schlechthin und h_t auf jedem dieser Texte konstant ist. Für E aus $Z(1, t)$, $E \subseteq A_t$ gilt $-\frac{1}{t} \log p(E) < H + \varepsilon$, also

$$p(E) > e^{-(H+\varepsilon)t}.$$

Wegen $\sum_{E \subseteq A_t} p(E) = p(A_t) \leq 1$ muß die Anzahl b_t dieser Texte

$$b_t < e^{t(H+\varepsilon)} \quad \dots \dots \dots (12)$$

erfüllen.

Aus

$$h_t - H^2 = \int |h_t - H|^2 dp \geq \int_{\Omega - A_t} |h_t - H|^2 dp \geq \varepsilon^2 p(\Omega - A_t)$$

und (10) folgt $p(\Omega - A_t) \rightarrow 0$, also $p(A_t) \rightarrow 1$. Damit ist folgendes erreicht: Für hinreichend großes t kann man die Texte E aus $Z(1, t)$ in zwei Gruppen einteilen; die erste Gruppe macht zusammen eine Menge A_t mit $p(A_t) \approx 1$ aus; ihre Anzahl b_t erfüllt (12); die zweite Gruppe macht zusammen die Menge $\Omega - A_t$ mit $p(\Omega - A_t) \approx 0$ aus. Das ist gerade das gewünschte Ergebnis. Die $E \subseteq A_t$ sind die Texte, die praktisch allein vorkommen, die „sinnvollen“ Texte also; $\Omega - A_t$ umfaßt die rein kombinatorisch möglichen, aber statistisch seltenen, eben die „sinnlosen“ Texte. Natürlich ist das Wort „sinnvoll“ hier nur eine Redensart für „wahrscheinlich“; es war eben für das Zustandekommen einer statistischen Theorie nötig, von der eigentlichen Grammatik einer Sprache abzusehen und nur ein höchst sekundäres Produkt der Grammatik (und anderer Faktoren), nämlich die Statistik der Sprache in Form einer WV p modellmäßig einzubauen. Angesichts der höchst trübseligen Grammatik des Telegrammstils ist dieser Substanzverlust wohl zu verschmerzen. Setzt man $b(\varepsilon) = e^{H+\varepsilon}$, so ist $b_t < b(\varepsilon)^t$. Ebenso leicht zeigt man z. B. $b_t > (1 - \varepsilon) b(-\varepsilon)^t$, (t hinreichend groß), so daß die Bedeutung von H als Maßzahl für den Reichtum der Sprache unmittelbar vor Augen tritt. Es sei erwähnt, daß man für recht umfangreiche Klassen von explizit konstruierten WVen p die mittlere Entropie H auch berechnen kann und daß bei verschiedenen realen Sprachen Schätzungen für H vorliegen.

§ 3. Theorie der rauschenden Kanäle

Die im folgenden darzustellenden Ergebnisse haben in technischer Hinsicht alles wesentliche mit den Ergebnissen aus § 2 gemeinsam; immer handelt es sich um Anwendungen von Sätzen aus der Ergodentheorie und des Satzes von McMILLAN. Wir gehen deshalb auf die Beweismethoden nicht näher ein.

Um ein Modell für die Übertragung durch einen Kanal zu erhalten, bilden wir zunächst mittels des Alphabets $1, \dots, a$ zwei Exemplare Ω, Ω' der Grundmenge aus § 2, Ω für den Anfang und Ω' für das Ende des Kanals; dazu gehören jetzt die Text-Systeme (Wort-Systeme) $Z(s, t)$ und $Z'(s, t)$ ($s \leq t$) und die als Definitionsbereiche von WVen in Ω, Ω' in Frage kommenden Mengensysteme B, B' . Bezeichnet man mit $B(s, t)$ das System aller Mengen, die man durch Vereinigung von Texten (Wörtern) aus $Z(s, t)$ erhalten kann und erklärt man $B'(s, t)$ analog, so ist

$$B \supseteq \bigcup_{s \leq t} B(s, t), \quad B' \supseteq \bigcup_{s \leq t} B'(s, t).$$

Offenbar geben Ω, B und Ω', B' alle Möglichkeiten wieder, was das Aussehen und die zeitliche Lage von Texten (Wörtern) am Anfang und am Ende des Kanals betrifft. Ist nun jedem ω aus Ω eine WV p'_ω auf B' zugeordnet, so wollen wir eine solche Zuordnung als Modell eines Kanals, oder kurz als einen Kanal bezeichnen. Wir wollen auch die Bezeichnungen

$$p'_\omega(E') = P(\omega, E') = P(E' | \omega) \quad (E' \text{ in } B', \omega \text{ in } \Omega)$$

verwenden; die mittlere mag den Kenner an die aus der Theorie der MARKOFFSchen Prozesse bekannten stochastischen Kerne erinnern, die rechte an bedingte Wahrscheinlichkeiten (Wahrscheinlichkeit von E' unter der Bedingung, daß ω gesendet wurde).

In dieser Form ist das Modell jedoch zu allgemein; unter den vielen E' aus B' sind im wesentlichen ja nur die Texte von Interesse; B' wird nur aus maßtheoretisch-technischen Gründen gebraucht. Wir fordern nun, daß für $E' = (\omega'_s, \dots, \omega'_t)$ aus $Z'(s, t)$ der Wert $P(E' | \omega) = P(E' | (\dots, \omega_{s-1}, \omega_s, \omega_{s+1}, \dots))$ nur von $\omega_s, \dots, \omega_t$ abhängt: $p(E' | \omega)$ soll für alle ω , die zum selben Text E aus $Z(s, t)$ gehören, denselben Wert haben; wir können dann $P(E' | \omega) = P(E' | E)$ schreiben. Es ist nun klar, in welcher Weise unser Modell das empirische Phänomen des Rauschens wiedergibt: Ist kein Rauschen da, die Übertragung fehlerfrei, so ist $P(E' | E) = 1$ oder 0, je nachdem E' und E gleichlauten oder nicht; liegt Rauschen vor, so ist bei festem E jedem E' eine Zahl $P(E' | E) \geq 0$ mit

$$\sum_{E' \text{ in } Z'(s, t)} P(E' | E) = 1 \quad \dots \dots \dots (1)$$

zugeordnet; die „Gewichte“ $P(E' | E)$ werden sich günstigenfalls auf die zu E ähnlichen Wörter E' konzentrieren; je stärker das Rauschen ist, desto weniger werden sie das tun. Anschaulich besagt obige Forderung, daß die Wahrscheinlichkeit, mit welcher ich am Lautsprecher in der Zeit von s bis t das Wort E' höre, nur davon abhängt, welches Wort in der Zeit von s bis t in das Mikrophon gesprochen wurde, nicht aber von früheren und späteren Worten. Man sagt dann, der Kanal sei vorgriffsfrei und vom Gedächtnis 0. Faßt man Phänomene wie Nachhall u. dgl. ins Auge, so ist diese Forderung zu scharf; es sei erwähnt, daß man die Theorie auch mit schwächeren Forderungen durchführen kann, welche diese Phänomene mit einschließen. Man kann eben in naheliegender Weise erklären, wann einem Kanal das endliche Gedächtnis m zugeschrieben werden soll. — Ferner wollen wir fordern, daß $P(T^k E' | T^k \omega) = P(E' | \omega)$ (k ganz, E' in B', ω in Ω), also insbesondere

$$P(T^k E' | T^k E) = P(E' | E) \quad (E \text{ in } Z(s, t), E' \text{ in } Z'(s, t)) \quad \dots \dots \dots (2)$$

gilt: $P(E' | E)$ soll nur von der Gestalt, nicht von der zeitlichen Lage der Texte E, E' abhängen, wenn sie nur gleichzeitig liegen. Diese Invarianz des Kanals macht, wie in § 2, die Anwendung der Ergodentheorie möglich. Es gibt zahlreiche Möglichkeiten, Kanäle, die all diesen Forderungen genügen, explizit zu konstruieren; man kann mit dergestalt explizit konstruierten Kanalmodellen theoretisch alle Züge realer Kanäle wiedergeben.

Sei $\varepsilon > 0$ und $s \leq t$. Unter einer ε -Familie von Kennwörtern für die Zeit von s bis t wollen wir ein System von Paaren (E_ν, E'_ν) ($\nu = 1, \dots, N$) mit folgenden Eigenschaften verstehen:

1. E_ν in $Z(s, t)$, d. h. E_ν ist ein Wort am Anfang des Kanals.
2. E'_ν in $B'(s, t)$, d. h. E'_ν ist ein Haufen von Wörtern am Ausgang des Kanals.
3. Die E'_ν sind paarweise elementfremd, $\bigcup_\nu E'_\nu = \Omega'$.
4. $P(E'_\nu | E_\nu) \geq 1 - \varepsilon$, also $P(\Omega' - E'_\nu | E_\nu) \leq \varepsilon$ ($\nu = 1, \dots, N$).

N heißt die Länge der Familie. Nr. 3 und 4 besagen, daß man die E_ν höchstens mit einer Wahrscheinlichkeit ε verwechselt, wenn man folgendes tut: hört man ein Wort aus E'_ν im Lautsprecher (glaubt man durch das Rauschen hindurch zu erkennen, daß das Wort zur Gruppe E'_ν gehört), so nimmt man an, das Wort E_ν sei ins Mikrophon gesprochen worden. In praxi wird E'_ν aus zu E_ν ähnlichen Wörtern bestehen. Die Aufgabe besteht darin, die E_ν so geschickt, d. h. verschiedenartig, zu wählen, daß die Länge N maximal wird.

Zunächst kann man sich wegen der Invarianz des Kanals wieder auf den Fall $s = 1, t \geq 1$ beschränken. $N(t, \varepsilon)$ sei die maximale Länge einer ε -Familie für die Zeit von 1 bis t . Bei fehler-

freier Übertragung ist offenbar $N(t, \epsilon) = a^t$. Man wird hoffen, eine Zahl b (mit $0 \leq b \leq a$) zu finden, derart, daß annähernd $N(t, \epsilon) = b^t$ gilt. Dies gelingt wieder mit Hilfe des Entropiebegriffs.

Ist p eine WV in Ω , so können wir für jedes $t \geq 1$ die p -Wahrscheinlichkeiten beliebiger Wörter E aus $Z(1, t)$ angeben: $p(E)$. Wir können aber auch mittels des Kanals für E aus $Z(1, t)$, E' aus $Z'(1, t)$ die Wahrscheinlichkeit, daß E am Eingang und E' am Ende des Kanals auftritt, durch

$$\tilde{p}(E, E') = P(E'|E) p(E) \dots \dots \dots (3)$$

festsetzen. Da man leicht $\sum_{E, E'} \tilde{p}(E, E') = 1$ verifiziert, ist dies ein W-theoretisch vernünftiger Ansatz. Man hat

$$p'(E') = \sum_E \tilde{p}(E, E') = \sum_E P(E'|E) p(E)$$

(3) besagt, daß $P(E'|E)$ nunmehr wirklich als bedingte Wahrscheinlichkeit aufzufassen ist. Ein Kanal ist also nichts als ein System bedingter Wahrscheinlichkeiten, das man mit jedem p zu einer WV \tilde{p} komplettieren kann, derart, daß auch die kombinierten Ereignisse E, E' Wahrscheinlichkeiten zugeschrieben erhalten; natürlich ist diese Zuschreibung \tilde{p} für jedes p eine andere, alle Zuschreibungen enthalten aber ein gemeinsames Skelett, eben den Kanal. — Bei gegebenem p kann man natürlich auch für jedes E' aus $Z'(1, t)$ eine bedingte Wahrscheinlichkeit „in umgekehrter Richtung“ $p(E|E') \geq 0$ mit

$$\sum_{E \text{ in } Z(1, t)} p(E|E') = 1 \dots \dots \dots (4)$$

und

$$p(E) = p(E|E') p'(E') \dots \dots \dots (5)$$

ansetzen. Für $p(E') > 0$ ist sie eindeutig bestimmt. Man bezeichnet sie manchmal auch als Rückschluß- oder Aposteriori-Wahrscheinlichkeit „nach Beobachtung von E' “. Wegen (4) kann man für jedes E' eine Entropie

$$H(\cdot | E') = - \sum_{E \text{ in } Z(1, t)} p(E|E') \log p(E|E')$$

erklären. Der Ausdruck

$$H_t(p|p') = \sum_{E' \text{ in } Z'(1, t)} p'(E') H(\cdot | E')$$

wir als bedingte Entropie bezeichnet. Einfache Konvexitätseigenschaften der Funktion $x \log x$ gestatten den Beweis der Ungleichung

$$H(1, t) \geq H_t(p|p') \dots \dots \dots (6).$$

Dies kann man etwa so interpretieren: $H(1, t)$ mißt den W-theoretisch möglichen Reichtum der Sprache p in der Zeit von 1 bis t . Hat man ein E' beobachtet, so weiß man über die Kenntnis der möglichen E hinaus etwas über das tatsächlich in den Kanal gesteckte E ; diese Kenntnis kann als eine Einschränkung des a priori möglichen Reichtums auf einen „nach Beobachtung von E' noch möglichen Reichtum“ aufgefaßt werden; ist der Kanal störungsfrei, so kann man das tatsächliche E genau identifizieren, d. h. der Reichtum schrumpft auf ein wohlbestimmtes Wort E zusammen; in der Tat ist dann $p(E|E') = 1$ für das mit E' gleichlautende Wort E , und sonst 0, d. h. $H(\cdot | E') = 0$. Bei beliebigen Kanälen wird die durch Beobachtung von E' eintretende Einschränkung sich in der bedingten WV $p(E|E')$ niederschlagen und u. U. etwa in einer stärkeren Konzentration der Gewichte auf die zu E' ähnlichen E resultieren. Jedenfalls hat man (6), und es ist plausibel, daß $C_t(p) = H(1, t) - H_t(p|p')$ um so größer ist, je besser der Kanal ist. Die Existenz von $C(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} C_t(p)$ ist leicht zu zeigen. Man bezeichnet

$$C = \sup_{p \text{ ergodisch}} C(p)$$

als die Durchlaßkapazität des Kanals. Es gilt $0 \leq C \leq \log a$.

Unter gewissen Voraussetzungen ist nun C in genau derselben Weise ein Maß für die Länge von Kennwortfamilien, wie H ein Maß für den Reichtum von p war. Ich möchte kurz diese Voraussetzungen erläutern. Aus einem Kanal $P(\omega, E')$ und einer WV p am Eingang des Kanals entsteht, wie angedeutet wurde, eine WV p' am Ende des Kanals und eine WV \tilde{p} , die für Ereignisse am Anfang und am Ende des Kanals erklärt ist; für p' und \tilde{p} kann man den Begriff „ergodisch“ in ähnlicher Weise erklären wie für p . Man sagt, der Kanal sei ergodisch, wenn jedes ergodische p ergodische \tilde{p} , p' liefert. Man hat zahlreiche Möglichkeiten, ergodische Kanäle mit vorgeschriebener Durchlaßkapazität zu konstruieren; gibt man z. B. eine Matrix $p_{ik} \geq 0$ mit

$\sum_j p_{jk} = 1$ ($i, k = 1, \dots, a$) vor, so ist durch

$$P(E'|E) = p_{\omega'_s \omega_s} \cdots p_{\omega'_t \omega_t} \begin{pmatrix} E = (\omega_s, \dots, \omega_t) \text{ in } Z(s, t), \\ E' = (\omega'_s, \dots, \omega'_t) \text{ in } Z'(s, t) \end{pmatrix}$$

ein ergodischer Kanal gegeben, dem man durch passende Wahl der p_{ik} jede Durchlaßkapazität zwischen 0 und $\log a$ erteilen kann. — Es gilt das

Coding Theorem (FEINSTEIN). Ist $P(\omega, E')$ ein invarianter ergodischer Kanal ohne Vorgriff, mit endlichem Gedächtnis und der Durchlaßkapazität C , dann genügt für jedes $\delta > 0$ und hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ die maximale Länge $N(t, \varepsilon)$ einer ε -Familie von Kennwörtern für hinreichend großes t den Ungleichungen

$$e^{t(C-\delta)} < N(t, \varepsilon) < e^{t(C+\delta)}.$$

Der Beweis für die linke Ungleichung, die auch für beliebiges $\varepsilon > 0$ und hinreichend großes t gilt, kann durch Anwendung des Satzes von McMILLAN auf p, \bar{p}, p' (p ergodisch, $C(p) > C - \delta$) geführt werden. Für den Beweis der rechten Ungleichung sind kompliziertere Untersuchungen nötig (NEDOMA [6], JACOBS [4], [5]).

Setzt man $b = e^C$, so ist annähernd $N(t, \varepsilon) = b^t$. C erweist sich damit als brauchbares Maß für die Leistungsfähigkeit eines Kanals.

§ 4. Die Bedienung rauschender Kanäle

Sei ein „Textlieferant“ (eine Sprache) (Ω'', p'') und ein Kanal $P(\omega, E')$ mit Ω am Eingang und Ω' am Ausgang gegeben.

Ist H die mittlere Entropie von p'' und läuft die Sprache mit 1 Zeichen/sec Geschwindigkeit, so ist mit großer Wahrscheinlichkeit die Menge K derjenigen Texte, bei denen man damit rechnen muß, daß einer von ihnen im Zeitraum von 1 bis t (sec) auftritt, von der Mächtigkeit $M(t, \varepsilon) < e^{t(H+\varepsilon)}$ ($t > t(\varepsilon)$). Läuft die Textlieferung mit v Zeichen/sec, so muß man mit einem unter $e^{vt(H+\varepsilon)}$ Texten in t sec rechnen.

Ist C die Durchlaßkapazität des Kanals, so hat man bei gegebenem $\varepsilon > 0$ für hinreichend großes t ε -Familien der Länge

$$N(t, \varepsilon) > e^{t(C-\varepsilon)}$$

zur Verfügung. Hat man nun

$$v < \frac{C - \varepsilon}{H + \varepsilon} \quad \dots \quad (1)$$

so ist für großes t

$$1 + M(t, \varepsilon) \leq N(t, \varepsilon) \quad \dots \quad (2).$$

Man kann nun so vorgehen: Sei t so fixiert, daß (2) gilt; $(E_1, E'_1), \dots, (E_{N(t, \varepsilon)}, E'_{N(t, \varepsilon)})$ sei eine ε -Familie von Kennwörtern für die Zeit von 1 bis t ; $(E_v^u, E_v'^u) = (T^{-ut} E_v, T^{-ut} E_v')$ ($v = 1, \dots, N(t, \varepsilon)$) ist dann eine Familie für die Zeit von $ut + 1$ bis $(u + 1)t$ (u ganz). Man bilde nun K irgendwie eindeutig auf eine Teilmenge von $\{E_1, \dots, E_{N(t, \varepsilon)}\}$ ab, etwa auf $\{E_1, \dots, E_{M(t, \varepsilon)}\}$; wegen (2) geht das; φ sei diese Abbildung; sie wird dem Empfänger mitgeteilt (das entspricht dem Aufstellen und Übergeben eines Code). Damit ist zugleich eine Abbildung φ_u von $T^{-ut} K$ in die ε -Familie für $\langle ut + 1, (u + 1)t \rangle$ gegeben. Der Sender stellt nun fest, welcher Text E der Länge t im Zeitraum $(ut + 1, (u + 1)t)$ angefallen ist; gehört E zu $T^{-ut} K$, so wird während der nun kommenden t sec $\varphi_u E = E_v^u$ in den Kanal gesteckt; gehört E nicht zu $T^{-ut} K$, so wird etwa $E_{N(t, \varepsilon)}^u$ in den Kanal gesteckt. Der Empfänger schließt nun, falls er einen Text aus E_v^u ($v \leq M(t, \varepsilon)$) empfängt, daß $\varphi_u^{-1} E_v^u$ angefallen war; empfängt er einen Text, der nicht in $\bigcup_{v \leq M(t, \varepsilon)} E_v^u$ liegt, so schließt er, daß irgendein anderes $E \notin T^{-ut} K$ angefallen war. Er

irrt sich dann mit einer Wahrscheinlichkeit $< \varepsilon$. Ergebnis: Sind $C, H > 0$ bekannt, so kann die Textlieferung mit beliebiger Geschwindigkeit $v < \frac{C}{H}$ erfolgen; für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ gilt dann auch (1), und man kann ein $t > 0$ so finden, daß eine Übertragung in Zeitetappen der Länge t mit Fehlerwahrscheinlichkeiten $< \varepsilon$ möglich ist.

Literatur

- [1] O. J. CHINTSCHIN, Über grundlegende Sätze der Informationstheorie. Arbeiten zur Informationstheorie, Berlin 1957: Deutscher Verlag der Wissenschaften.
- [2] A. FEINSTEIN, Foundations of Information Theory, New York 1958.
- [3] P. R. HALMOS, Lectures on Ergodic Theory, Tokyo 1956.
- [4] K. JACOBS, Die Übertragung diskreter Informationen durch periodische und fastperiodische Kanäle, Math. Ann. **137** (1959), S. 125—135.
- [5] K. JACOBS, Informationstheorie, Göttingen 1960, Skriptum.
- [6] J. NEDOMA, The capacity of a discrete channel, Trans. first Prague Conference (1956), S. 143—181.

Anschrift: Prof. Dr. K. JACOBS, Göttingen, Bunsenstr. 3, Institut f. Math. Statistik

Einige neuere Untersuchungen aus der Theorie der Wahrscheinlichkeiten großer Abweichungen

VON WOLFGANG RICHTER

Einen sehr großen Raum nehmen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung die Grenzwertsätze ein. Im einfachsten Falle geht es um das Verhalten der Verteilung von $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ für $n \rightarrow \infty$, wobei ξ_1, ξ_2, \dots unabhängige Zufallsgrößen mit der gemeinsamen Verteilungsfunktion $V(x) = P\{\xi_j < x\}$ ist. Der wohl elementarste Grenzwertsatz ist das Gesetz der großen Zahlen, das aber immerhin die Existenz der Erwartungswerte $E \xi_j$ voraussetzen muß. Ist ξ_1 nach CAUCHY verteilt, so ist keine Aussage möglich.

Wenn nicht nur das erste, sondern auch das zweite Moment von ξ_j existiert, dann gilt der zentrale Grenzwertsatz, wonach

$$P\left\{\frac{\sum_{j=1}^n (\xi_j - E \xi_j)}{\sqrt{n}} < x\right\} = F_n(x) \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} \Phi(x; 0, D^2 \xi_1)$$

gilt. Die Variable x ist hier von n unabhängig.

Die Theorie der Wahrscheinlichkeiten großer Abweichungen sucht nun eine Antwort auf die Frage: wie verhält sich $F_n(x)$ in den vom Verteilungszentrum sehr weit entfernten Gebieten?

Ist etwa $|\xi_j - E \xi_j| < C$ für eine positive Konstante C , dann ist

$$F_n(x) = 0 \quad \text{für } x < -\sqrt{n} C$$

und

$$1 - F_n(x) = 0 \quad \text{für } x > \sqrt{n} C,$$

während die Verteilungsfunktion der Normalverteilung $\Phi(x, 0, D^2 \xi_1)$ dort überall von Null verschiedene Werte ergibt.

Wie läßt sich das Verhalten von $F_n(x)$ in den Randbereichen genauer beschreiben? Mathematisch formuliert, sieht das Problem so aus: Gesucht sind Grenzausdrücke für $F_n(-x)$ und $1 - F_n(x)$, falls $x \rightarrow +\infty$ gleichzeitig mit $n \rightarrow \infty$.

Analog interessiert das lokale Verhalten der Verteilung von $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ unter diesen Bedingungen.

Der wichtigste Fall ist wohl der Fall der beschränkten oder der „fast“ beschränkten Zufallsgrößen, für die $1 - V(x)$ und $V(-x)$ für $x \rightarrow +\infty$ hinreichend schnell gegen Null strebt. Genauer: es wurde das Problem großer Abweichungen untersucht für den Fall, daß nicht nur alle Momente von ξ_1 existieren, sondern sogar

$$M(w) = E e^{\xi_1 w}$$

für alle w mit $|w| < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$). Dies ist die CRAMERSche Bedingung. Sie läßt sich äquivalent so formulieren: die charakteristische Funktion $\varphi(t) = E e^{i \xi_1 t}$ läßt sich auf eine streifenförmige Umgebung der t -Achse analytisch fortsetzen zu einer Funktion $M(w)$, so daß $\varphi(t) = M(it)$ ist.

Als Hauptergebnis kennt man den integralen Satz von H. CRAMÉR [1]: Ist $x = o(\sqrt{n})$ für $n \rightarrow \infty$, so gilt

$$\frac{1 - F_n(x)}{1 - \Phi(x; 0, D^2 \xi_1)} = \exp \left\{ \frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda \left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right) \right\} \left[1 + O \left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right) \right],$$

($\lambda(t)$ analytisch für $|t| < \varepsilon$)

oder: für alle x , für die die Gleichung

$$K'(w) - E \xi_1 = \frac{x}{\sqrt{n}}$$

eine Lösung w_0 besitzt, ist

$$1 - F_n(x) = \frac{M^n(w_0) e^{-\sqrt{n} w_0 (x + \sqrt{n} E \xi_1)}}{w_0 \sqrt{2 \pi n} K''(w_0)} \left[1 + O \left(\frac{1}{n} \right) \right],$$

wobei $K(w) = \log M(w)$ (\log — Hauptwert des Logarithmus) bezeichnet.

Ähnliche Sätze lassen sich für die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_n(x)$ von $\sum_{j=1}^n \xi_j / \sqrt{n}$ beweisen, wenn z. B. ξ_1 eine Dichte besitzt.

Hier sind die Namen von DANIELS [2] und CHERNOFF zu nennen. Auch in der Arbeit [3] findet man einen Beitrag hierzu. Eine Anwendung fanden diese Sätze bisher lediglich in Problemen der Physik der Polymere. KÜHN und GRÜN leiteten ähnliche Gesetzmäßigkeiten in den Jahren 1937—1943 ab, allerdings ohne Kenntnis der mathematischen Ergebnisse.

Hier soll nun untersucht werden, welche Gesetzmäßigkeiten auftreten, wenn die CRAMÉRsche Bedingung nicht erfüllt ist, wenn z. B. einige Momente nicht mehr existieren.

Dazu betrachten wir die Klasse C der folgenden Verteilungen: Eine Verteilung gehöre zur Klasse C , wenn sich die charakteristische Funktion $\varphi(t)$, ausgehend von ihren Werten für $t > 0$, auf eine Umgebung der positiven t -Halbachse, einschließlich von $t = 0$, analytisch fortsetzen läßt zu einer Funktion $M(w)$, so daß $M(it) = \varphi(t)$.

Verteilungen aus C , die sämtliche Momente besitzen, genügen der CRAMÉRSchen Bedingung. Uns interessieren hingegen die Teilmengen C_l^1 der Verteilungen, für die das l -te Moment μ_l noch existiert, nicht aber das $(l+1)$ -te Moment. Es ist

$$M(w) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\mu}_k \frac{w^k}{k!}; \quad \mu_k = \tilde{\mu}_k \text{ für } 1 \leq k \leq l;$$

$\tilde{\mu}_k$ heißt (für $k > l$) das k -te Pseudomoment der Verteilung.

Es läßt sich dann der folgende Satz beweisen.

Satz. Es seien ξ_1, ξ_2, \dots unabhängige identisch verteilte Zufallsgrößen, deren gemeinsame Verteilungsfunktion $V(x)$ der Klasse C_l^1 angehört. Es gebe ein n_0 so, daß die Verteilungsfunktion der Summe $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{n_0}$ absolut stetig und ihre Ableitung beschränkt ist. Bezeichne $g_n(x)$

für $n \geq n_0$ die Wahrscheinlichkeitsdichte von $\sum_{j=1}^n \xi_j$.

Es sei $\text{Im } \tilde{\mu}_{l+1} \neq 0$. Ist x für $n \rightarrow \infty$ der Bedingung $\frac{|x|}{n} \rightarrow +\infty$ unterworfen, so gilt für $n \rightarrow \infty$ folgende asymptotische Darstellung:

$$g_n(x) = \frac{n \text{ Im } \tilde{\mu}_{l+1}}{\pi |x - n \text{ Re } \tilde{\mu}_1|^{l+2}} \left[1 + O\left(\frac{1}{|x - n \text{ Re } \tilde{\mu}_1|}\right) \right].$$

Ausführlicher wird auf diese Probleme in einem Artikel eingegangen, der in der Wissenschaftlichen Zeitschrift der Technischen Hochschule Dresden eingereicht wurde.

Literatur

- [1] H. CRAMÉR, Sur un nouveau théorème-limite de la théorie des probabilités. Actual. sci. et ind. N 736, Paris 1938, III, S. 5—23.
- [2] H. E. DANIELS, Saddlepoint Approximations in Statistics. Ann. Math. Statistics 25 (1954), S. 631—650.
- [3] W. RICHTER, Lokale Grenzwertsätze für große Abweichungen. Teorija verojatn. primenenija 2 (1957), S. 214—229 (russ.).

Anschrift: Dr. WOLFGANG RICHTER, Dresden A 53, Tolkewitzer Str. 41

Die mathematischen Grundlagen der Monte-Carlo-Methode*)

Von G. SCHULZ

In der Reihe „Ergebnisse der angewandten Mathematik“ (Springer-Verlag) wird demnächst ein Band von G. SCHULZ und P. ROOS, Irrfahrtprobleme und Monte-Carlo-Methode, erscheinen, in dem der Stoff des Vortrags enthalten ist.

*) Auf Einladung der Tagungsleitung gehaltener Hauptvortrag.

Über einen Exponentialverteilungstest

Von HORAND STÖRMER

Es sei M die Menge aller Verteilungsfunktionen mit endlichem Erwartungswert μ im R_1 und M_0 die Menge aller Verteilungsfunktionen $F_x(t)$ der Form

$$F_x(t) = F_x(t|\mu) = 1 - e^{-t/\mu}.$$

Mit Hilfe einer Stichprobe vom Umfang n soll die Nullhypothese H_0 :

$$F_x(t) \in M_0 = \{F_x(t|\mu)\}$$

getestet werden.

Die der Größe nach geordneten Stichprobenwerte (Ranggrößen) seien

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n, \quad x_0 = 0.$$

Weiter sei $\varepsilon(n)$ bei vorgegebener statistischer Sicherheit S die zweiseitige Schranke für die maximale Abweichung zwischen wahrer und empirischer Verteilungsfunktion beim Test von KOLMOGOROW.

Für $\varepsilon(n)$ gilt asymptotisch

$$\varepsilon(n) \approx \begin{cases} 1,36 n^{-1/2} & \text{für } S = 0,95, \\ 1,63 n^{-1/2} & \text{für } S = 0,99. \end{cases}$$

Der kritische Bereich V des Testes wird dann definiert durch die Vereinigungsmenge

$$V = A \dot{+} B$$

mit

$$A = \left\{ \max_v \left| y_v - \frac{v}{n-1} \right| > \varepsilon(n-1) \right\}, \quad B = \{x_1 < 0\},$$

$$y_v = \frac{\sum_{\lambda=0}^{v-1} (n-\lambda)(x_{\lambda+1} - x_\lambda)}{\sum_{\lambda=1}^n x_\lambda}, \quad v = 1, \dots, n-1.$$

Die Nullhypothese wird also genau dann verworfen, wenn $\mathfrak{X} = (x_1, \dots, x_n)$ in V liegt.

Dieser Test hat folgende Eigenschaften:

1. Ein Fehler erster Art (Verwerfen von H_0 , obgleich H_0 richtig ist) tritt mit der Wahrscheinlichkeit $1 - S$ ein:

$$P_n\{V|H_0\} = 1 - S.$$

2. Ist eine beliebige aber feste Alternativhypothese H_1 gegeben durch

$$H_1: F_x(t) = F_x^{(1)}(t) \in \overline{M}_0 = M - M_0,$$

so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n\{V|H_1\} = 1.$$

Der Test ist also konsistent gegenüber jeder solchen einfachen Alternativhypothese.

Der Nachweis dieser Eigenschaften soll an anderer Stelle dargestellt werden.

Anschrift: Dr. HORAND STÖRMER, Großhesselohe b. München, Wettersteinstr. 17

D. MECHANIK

Vergleich des theoretischen und experimentellen Verhaltens eines nichtlinearen mechanischen Verbandes

VON N. FORBAT

1. Die große Mehrzahl der experimentellen Untersuchungen von nichtlinearen Systemen bezieht sich auf elektrotechnische oder elektronische Anordnungen. Wir haben im Laboratorium für theoretische Mechanik der *Faculté Polytechnique de Mons* einen vielfach in der Theorie betrachteten nichtlinearen mechanischen Verband (siehe z. B. A. FÖPPL: Vorlesungen über Technische Mechanik, 3. Aufl. 1 Bd. S. 225, München/Berlin 1943; H. KAUDERER: Nichtlineare Mechanik, S. 347, Springer 1958) realisiert und verglichen seit mehreren Monaten die erzielten Meßresultate mit denjenigen der Theorie.

2. Es handelt sich um die autonomen selbsterregten Schwingungen der Anordnung, die in Bild 1 dargestellt ist (siehe auch KAUDERER loc. cit. Abb. 119) und die die mechanisch sehr wichtigen Erscheinungen der trockenen Reibung zu untersuchen gestattet. Ein quaderförmiger Block vom Gewicht Mg liegt auf einem horizontalen endlosen Band, das durch äußeren Antrieb unter

dem Block mit der konstanten Geschwindigkeit V von rechts nach links bewegt wird. Der Klotz wird von einer linearen Schraubenfeder (Konstante μ) gehalten. Vom Band aus wirkt außerdem auf ihn eine Reibungskraft R , die von der Relativgeschwindigkeit nichtlinear abhängt. Wir haben für den Reibungskoeffizienten f folgendes Gesetz angenommen:

$$f(V-v) = \frac{R_0 - R_1}{1 + \lambda \cdot |V-v|} + R_1 \quad \dots \quad (1),$$

v = Absolutgeschwindigkeit des Blocks, R_0 , R_1 , λ = Konstanten.

Die Konstanten, die in dieser, auch von den erwähnten Autoren angenommenen Funktion vorkommen, wurden experimentell ermittelt. Nach Abmontierung der Schraubenfeder wurde der Block dazu durch die bekannte Spannung eines Fadens über dem unter ihm mit verschiedenen Geschwindigkeiten V laufenden Band im absoluten Gleichgewicht gehalten. Trotz der vielen Vorsichtsmaßnahmen ergab sich dabei natürlich eine Streuung der Resultate, die wir in großer Zahl ermittelten. Deshalb wurde die aus diesen Resultaten zu ermittelnde Funktion (1) durch



Bild 1



Bild 2

die linearisierte Methode der kleinsten Quadrate errechnet. In unserem Falle (Sohle des Blocks aus Gußeisen, Gewicht $Mg = 9,012$ kg, Band aus Chrom-Strahl) erhielten wir schließlich als Reibungsfunktion

$$f(V-v) = \frac{0,167}{1 + 0,114 \cdot |V-v|} + 0,503 \quad \dots \quad (2),$$

wobei die Geschwindigkeiten in $\text{cm} \cdot \text{sek}^{-1}$ ausgedrückt sind.

Die Bestimmung der Federkonstante ergab den Wert $\mu = 3,95 \text{ kg} \cdot \text{cm}^{-1}$.

3. Man kann nun zum eigentlichen Versuch übergehen und die Relaxationsschwingungen des Blocks bei verschiedenen Bandgeschwindigkeiten direkt eintragen. Dies erfolgt auf eine eingeschwärzte Trommel, die sich gleichförmig um ihre Achse dreht (Bild 2). Man erhält so unmittelbar das Bewegungsgesetz als Funktion der Zeit und kann dann, nach gehöriger Vergrößerung, das Einschwingen und die periodischen Schwingungen untersuchen. Wir haben nur die periodische Bewegung untersucht (die praktisch und theoretisch nach einer endlichen Zeit eintritt) und diese in der Phasenebene aufgezeichnet, nachdem eine graphische Differentiation des Bewegungsgesetzes vorgenommen wurde. Die Abszisse des Blocks, die wir mit q bezeichnen, wurde positiv in Richtung der Bandgeschwindigkeit V gemessen, wobei der Ursprung weiter unten definiert wird. Die Bilder 3 und 3' zeigen in den Koordinatenachsen q und $\dot{q} = v = \frac{dq}{dt}$ die geschlossenen (also einer periodischen Bewegung entsprechenden) Phasenkurven, die wir bzw. für $V = 1,21 \text{ cm} \cdot \text{sek}^{-1}$ und $V = 15 \text{ cm} \cdot \text{sek}^{-1}$ erhielten. Natürlich wurde eine große Anzahl von experimentellen Punkten konstruiert und danach erst wurden diese Kurven als „Mittelkurven“ aufgezeichnet.

4. Theoretisch wurde die Bewegung des Blocks folgendermaßen behandelt. Wenn x die Abszisse des Blocks, von einer Lage ab, die der natürlichen Länge der Schraubenfelder entspricht, bezeichnet, so ist die Differentialgleichung der Absolutbewegung

$$M\ddot{x} = -\mu x + R(V - \dot{x}) \quad \dots \quad (3)$$

wobei

$$R(V - \dot{x}) = \pm M g \cdot f(V - \dot{x}) \quad \left(\begin{array}{l} + \text{ für } V - \dot{x} > 0 \\ - \text{ für } V - \dot{x} < 0 \end{array} \right) \quad (4)$$

ist. Die Gleichgewichtslage O_1 des Blocks wird durch die Abszisse

$$x_0 = \frac{1}{\mu} R(V)$$

bestimmt und von nun ab werden die Abszissen $q = x - x_0$ von diesem Ursprung aus gerechnet¹⁾.

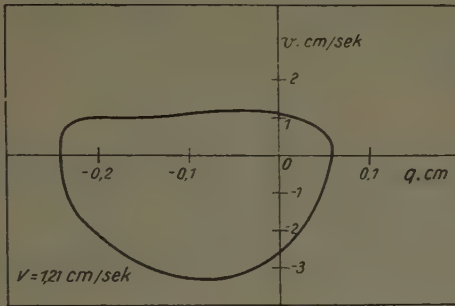


Bild 3

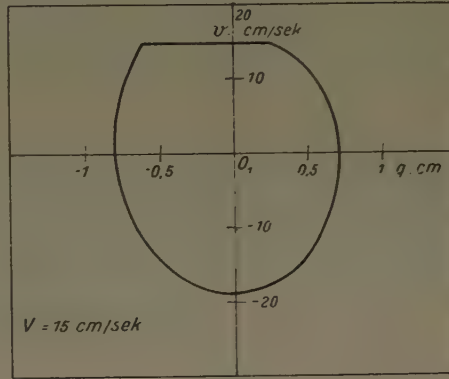


Bild 3'

Aus (3) wird dann

$$M \ddot{q} = -\mu(q + x_0) + R(V - \dot{q}) \quad (5)$$

oder, wenn wir $\dot{q} = v$ setzen,

$$v \frac{dv}{dq} + \frac{\mu}{M} = -\frac{1}{M} R(V) + \frac{1}{M} R(V - \dot{q}) \quad (6)$$

Dies ist die entgültige Differentialgleichung der Phasenkurven in der q, v Ebene. Für ein gegebenes V sind alle Koeffizienten dieser Gleichung (6) bekannt, da wir μ und M kennen und

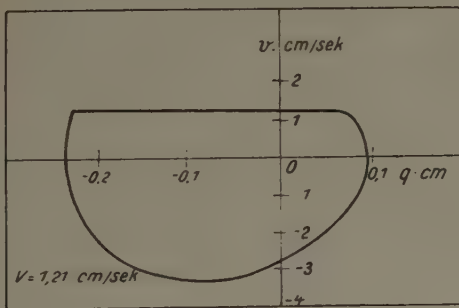


Bild 4

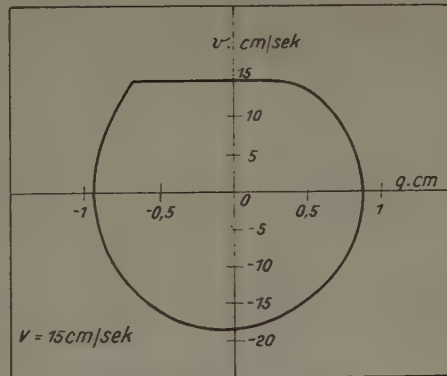


Bild 4'

da R durch (2) und (4) definiert ist. Die Diskussion dieser Gleichung und ihrer Lösungen betreffend, verweisen wir auf KAUDERER (loc. cit., S. 399—404) und nehmen hier als bewiesen an, daß bei beliebigen Anfangsbedingungen nach einem endlichen Zeitintervall ein periodischer und stabiler Grenzzyklus erreicht wird, der nur von V abhängt.

Mittels des elektronischen Analogiegeräts PACE 221-R wurden diese Grenzzyklen für $V = 1,21 \text{ cm sek}^{-1}$ und $V = 15 \text{ cm sek}^{-1}$ konstruiert, wobei für q und v dieselben Maßstäbe wie bei den experimentellen Grenzzyklen verwendet wurden. Wir erhielten so die Bilder 4 und 4'.

¹⁾ O_1 ist ebenfalls der Ursprung der Abszissen bei den experimentellen Abszissenmessungen. Es ist ziemlich leicht, die experimentelle Gleichgewichtslage O_1 zu ermitteln, wir können jedoch darauf in diesem Abriß nicht eingehen.

5. Der Vergleich der Bilder 3 und 3' bzw. mit 4 und 4' zeigt, daß, abgesehen von einer systematischen Verkleinerung der Dimensionen parallel zur q -Achse bei den experimentellen Grenzzyklen, die Kurven einander genügend ähnlich sind und sogar ganz gut überdecken. Wenn man bedenkt, daß ja Reibungskoeffizienten und Reibungsexperimente in der Mechanik nie etwas sehr Genaues darstellen, so kann man wohl den Ausgang als ziemlich zufriedenstellend betrachten (die Vergleiche wurden für eine viel größere Zahl von V -Werten ausgeführt und ergaben immer sehr ähnliche Grenzzyklen).

Diese Tatsache erlaubt es erstens, das Reibungsgesetz $f = f(V - v)$ als recht vertrauenswürdig zu betrachten und zweitens, auch bei anderen mechanischen nichtlinearen Vorgängen Versuche als nicht hoffnungslos zu betrachten.

Es ist uns besonders angenehm, hier unserem Mitarbeiter Herrn Dipl.-Ing. J. BOUGARD, der einen großen Teil der Versuche ausgeführt hat, zu danken.

Anschrift: Prof. Dr. N. H. FORBAT, Mons, rue de Naast, Belgien

Die Darstellung nichtlinearer Schwingungen ohne Dämpfung in einer verallgemeinerten Phasenebene und Anwendung auf die Foucaultsche Regel für einen astatisch gelagerten, symmetrischen Kardankreisel

VON R. KAWAI

Wie bei der FOUCAULTSchen Regel für einen astatisch gelagerten, nicht immer schnellen, symmetrischen KARDANKreisel [1] gibt es verschiedene mechanisch oder technisch zu untersuchende Probleme, deren Bewegungsablauf die Differentialgleichung folgender Art beschreibt:

$$\ddot{x} + f(x) = 0 \quad \dots \dots \dots (1).$$

Obwohl diese Gleichung numerisch oder graphisch integriert werden kann [2] [3], ist es für die Praxis zweckmäßiger, den Bewegungszustand in einer Phasenebene darzustellen, um den Charakter der Bewegung nicht für eine einzelne Anfangsbedingung sondern im ganzen zu erfassen.

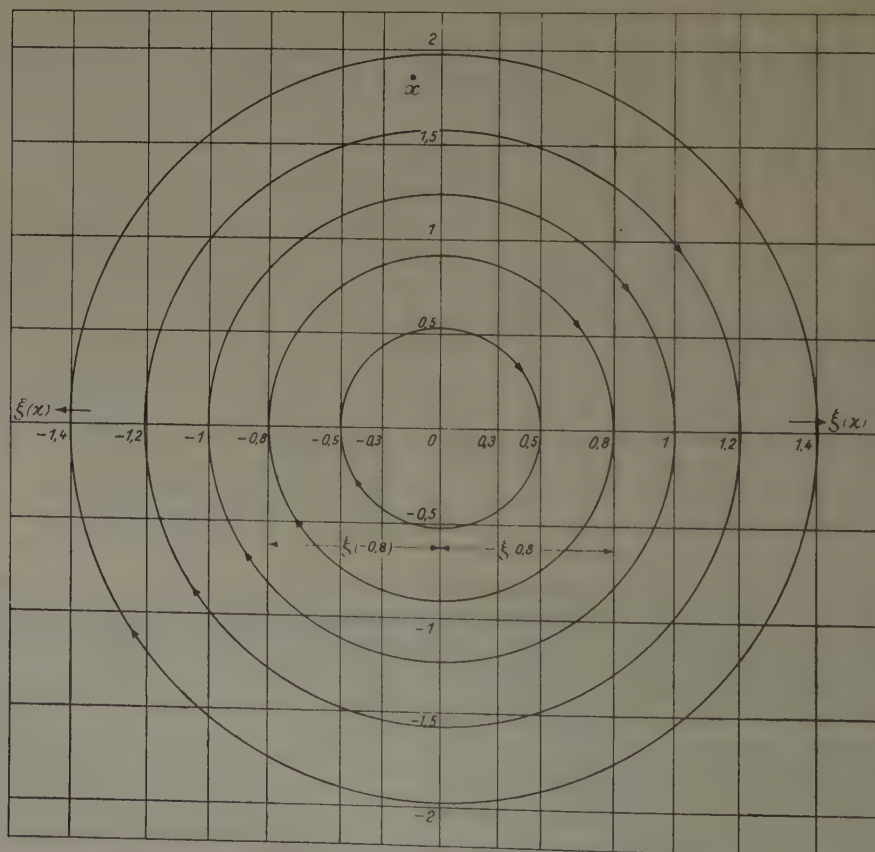


Bild 1. Die Phasenebene und die Energiekurve für das System, dessen Bewegungsgleichung $\ddot{x} + x + x^3 = 0$ ist

Die Darstellung wird besonders einfach, wenn man den Begriff der Phasenebene etwas erweitert und auf der Ordinatenachse die Geschwindigkeit (wie bei gewöhnlicher Phasenebene), auf der Abszissenachse aber nicht die Verschiebung selbst, sondern die Quadratwurzel der Potentialenergie bezüglich des Nullpunktes (also eine Funktion der Verschiebung) abträgt.

1. Aus der Gleichung (1) gewinnen wir das Energieverhältnis

$$\dot{x}^2 + 2 \int_0^x f(x) dx = \text{const} \quad \dots \dots \dots (2).$$

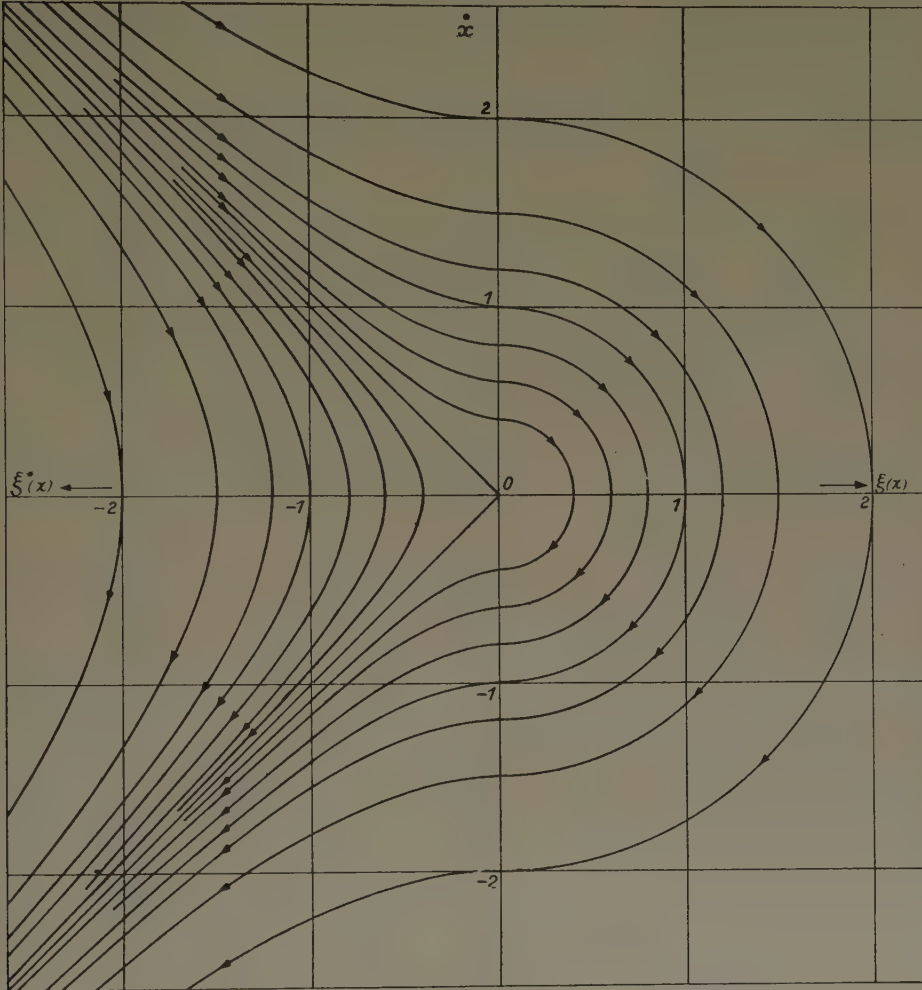


Bild 2. Die Phasenebene und die Energiekurve für das System, dessen Bewegungsgleichung $\ddot{x} + |x| = 0$ ist

Wenn man auf der Abszissenachse den Abstand vom Nullpunkt

$$\xi = \sqrt{2 \int_0^x f(x) dx} \quad \dots \dots \dots (3)$$

abträgt, wird das Energieverhältnis (2) durch Kreise mit dem Zentrum im Nullpunkt in der $\xi\dot{x}$ -Ebene dargestellt, soweit der Wert des Integrals $\int_0^x f(x) dx > 0$ ist. Der Abstand ξ muß für positives x in der positiven Richtung und für negatives x in der negativen Richtung abgetragen werden. Wenn die Kennlinie der Rückstellkraft unsymmetrisch bezüglich des Nullpunktes ist, ist ξ für positives x unsymmetrisch gegen das für negatives x . Die Energiekurve für einen solchen Fall bildet aber auch immer einen Kreis. Das oben Gesagte führt zum Satz:

Der Bewegungszustand eines Systems, dessen Gleichung die Form (1) hat, wird in der $\xi\dot{x}$ -Ebene durch Kreise dargestellt, soweit $\int_0^x f(x) dx > 0$ ist.

Zum Beispiel ist der Bewegungszustand eines Systems, dessen Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + x + x^3 = 0 \quad \dots \dots \dots (4)$$

ist, in Bild 1 dargestellt.

Wenn $\int_0^x f(x) dx < 0$ ist, soll die Gleichung (2) wie folgt umgeschrieben werden:

$$\dot{x}^2 - 2 \left| \int_0^x f(x) dx \right| = \text{const} \quad (5).$$

Wenn man dann auf der Abszissenachse den Abstand vom Nullpunkt

$$\xi^* = \sqrt{2 \left| \int_0^x f(x) dx \right|} \quad (6)$$

abträgt, wird die Energiekurve durch gleichseitige Hyperbeln in der $\xi^*\dot{x}$ -Ebene dargestellt, deren Asymptoten die Quadranten halbieren. Die Bemerkung über die Richtung von ξ ist für ξ^* auch gültig. Das führt zum Satz:

Der Bewegungszustand eines Systems, dessen Gleichung die Form (1) hat, wird in der $\xi^*\dot{x}$ -Ebene durch gleichseitige Hyperbeln dargestellt, soweit $\int_0^x f(x) dx < 0$ ist.

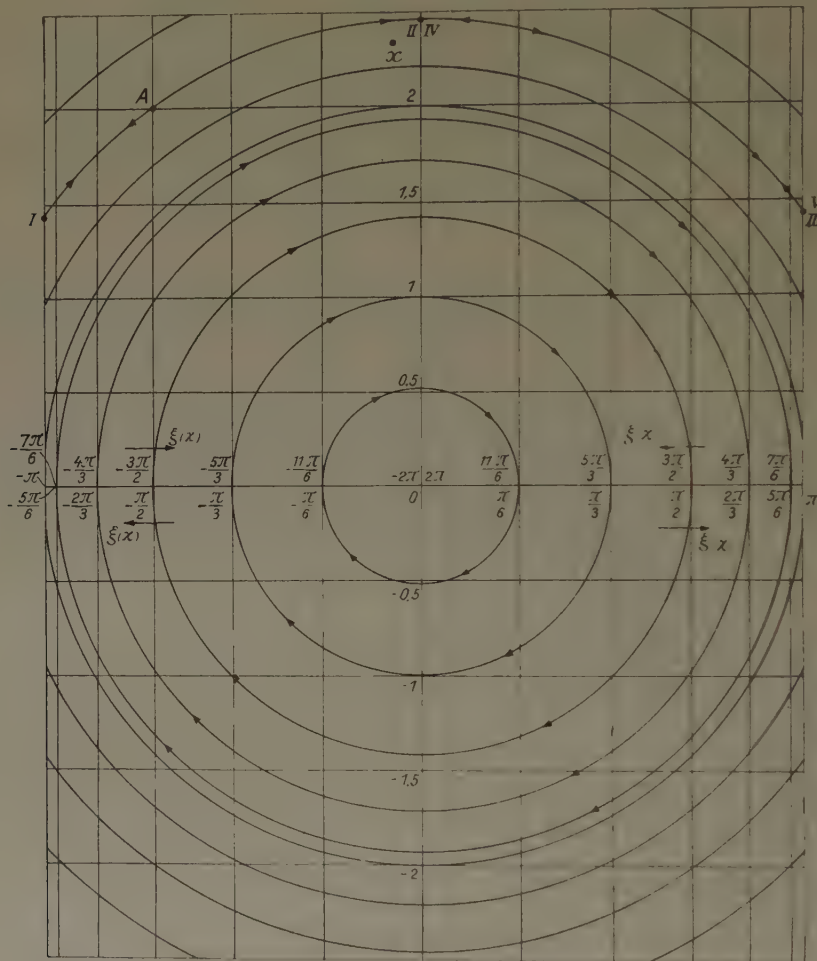


Bild 3. Die Phasenebene und die Energiekurve für das System, dessen Bewegungsgleichung $\ddot{x} + \sin x = 0$ ist

Zum Beispiel wird der Bewegungszustand eines Systems, dessen Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + |x| = 0 \quad (7)$$

ist, durch Bild 2 dargestellt.

Wenn das Integral $\int_0^x f(x) dx$ identisch Null ist, wird die Phasenebene eine Gerade, die mit der \dot{x} -Achse übereinstimmt, und die Energiekurve wird ein Punkt auf der \dot{x} -Achse. Das ist eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit.

Das Integral $\int_0^x f(x) dx$ ändert seinen Wert nicht immer monoton. Wenn der Wert von $\xi(x)$ oder $\xi^*(x)$ zuerst zunimmt und dann abnimmt oder umgekehrt, muß der Bildpunkt auf derselben Kurve umkehren. Zum Beispiel in Bild 3, das die Energiekurve der Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + \sin x = 0 \quad (8)$$

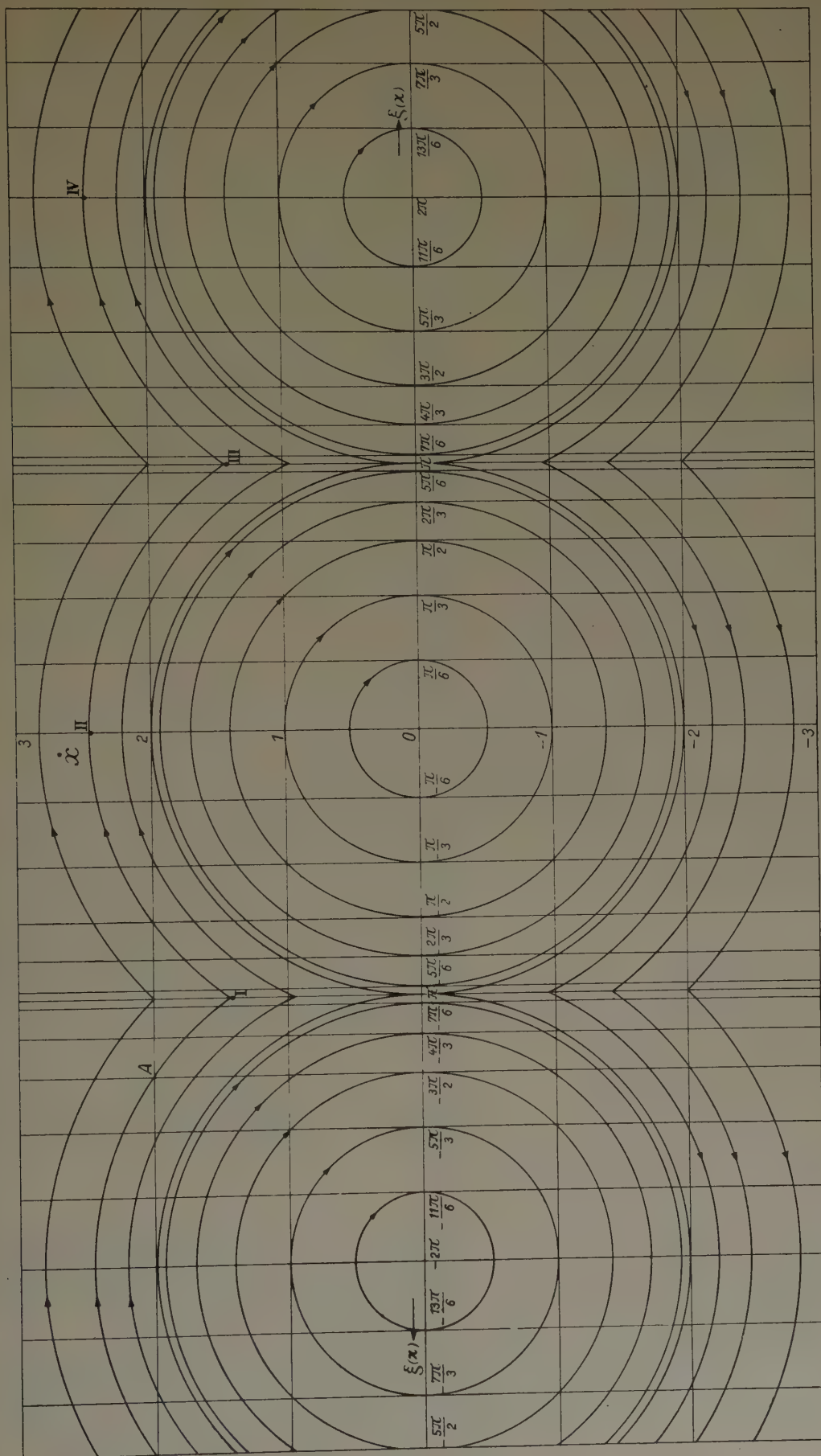


Bild 4. Entwicklung der in Bild 3 dargestellten Phasenebene durch Spiegelung

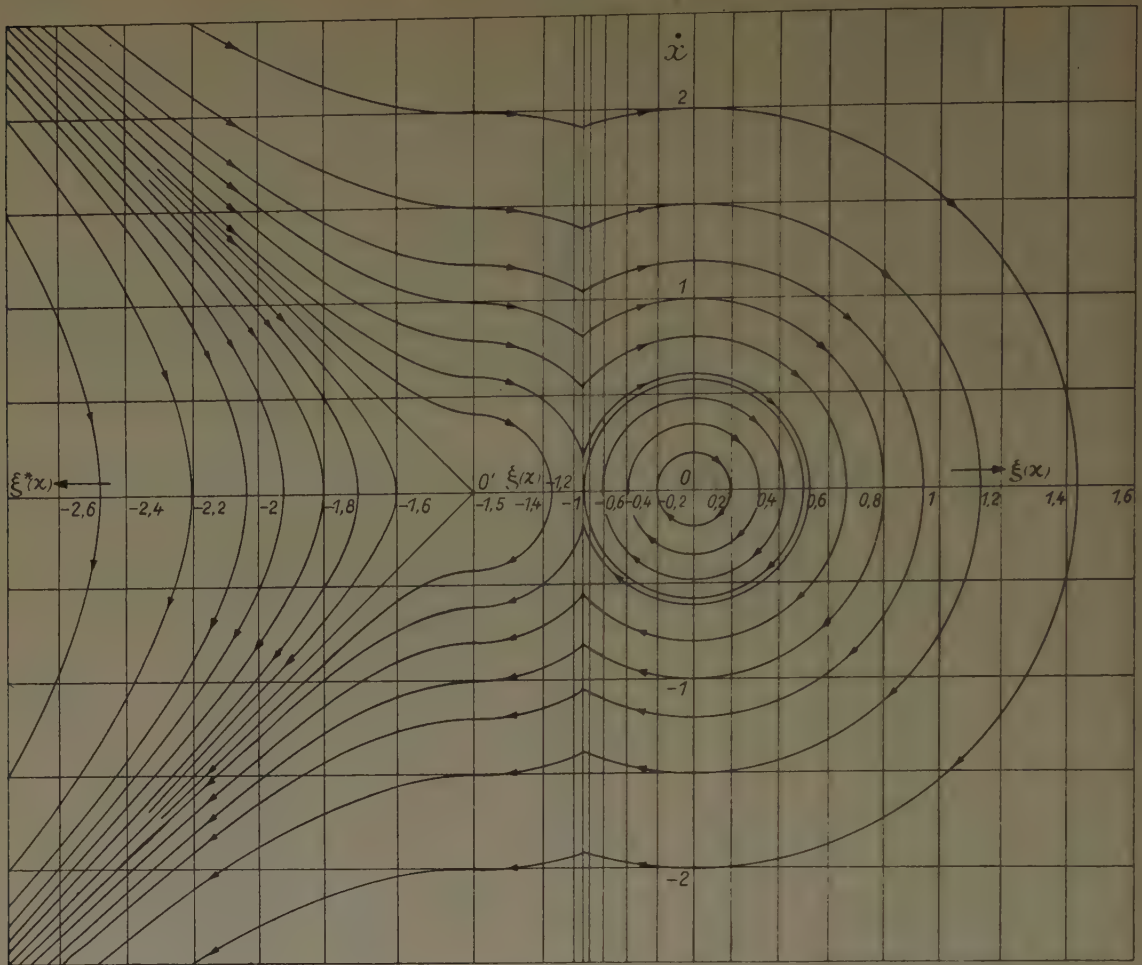


Bild 5. Die entwickelte Phasenebene und die Energiekurve für das System, dessen Bewegungsgleichung $\ddot{x} + x + x^2 = 0$ ist

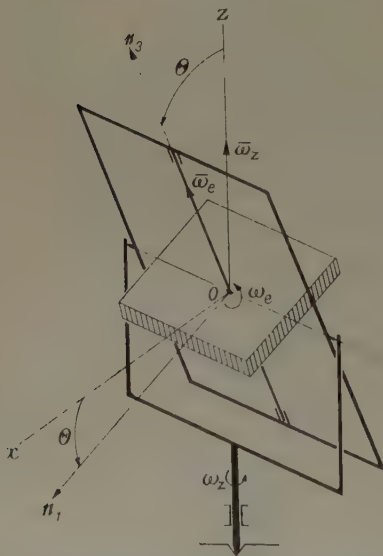


Bild 6. Einastatisch gelagerter, symmetrischer Kardankreisler

zeigt, läuft der Bildpunkt der Bewegung, deren Anfangsbedingung durch den Punkt A ($x = -3\pi/2$) gegeben wird, von A nach I und dann über II nach III. Im Punkt III kehrt er auf derselben Energiekurve um und läuft nach IV und dann wieder zurück nach V (III). Diese Vorgänge können eindeutig dargestellt werden, wenn man die Phasenebene durch Spiegelung mehrmals wiederholt (Bild 4).

Wenn der Wert des Integrals $\int_n^x f(x) dx$ sein Vorzeichen ändert, also wenn die Abszisse von ξ zu ξ^* oder umgekehrt übergeht, dann verwandelt sich die Energiekurve aus einem Kreis in eine Hyperbel oder umgekehrt. Zum Beispiel bei der Behandlung der Gleichung

$$\ddot{x} + x + x^2 = 0 \quad \dots \quad (9)$$

ändert der Wert von $\int_0^x (x + x^2) dx$ sein Vorzeichen an der Stelle $x = -1,5$. In Bild 5 sind die Energiekurven in der durch Spiegelung entwickelten Phasenebene gezeichnet.

Die oben behandelte Phasenebene hat folgende Eigenschaften:

- Sie ist anwendbar zum Zeichnen gewöhnlicher Phasenkurven, wobei die Zeichenarbeit vermindert wird.
- Die Berechnung des Zeitablaufs ist näherungsweise möglich, obwohl die bekannten Methoden für gewöhnliche Phasenkurven [4] nicht direkt benutzt werden können.

- c) Wenn das Integral $\int_0^x f(x) dx$ nur im begrenzten Gebiet von x einen begrenzten, negativen Wert annimmt, können die Energiekurven immer nur durch Kreise dargestellt werden, wenn man den Nullpunkt geeignet verschiebt.

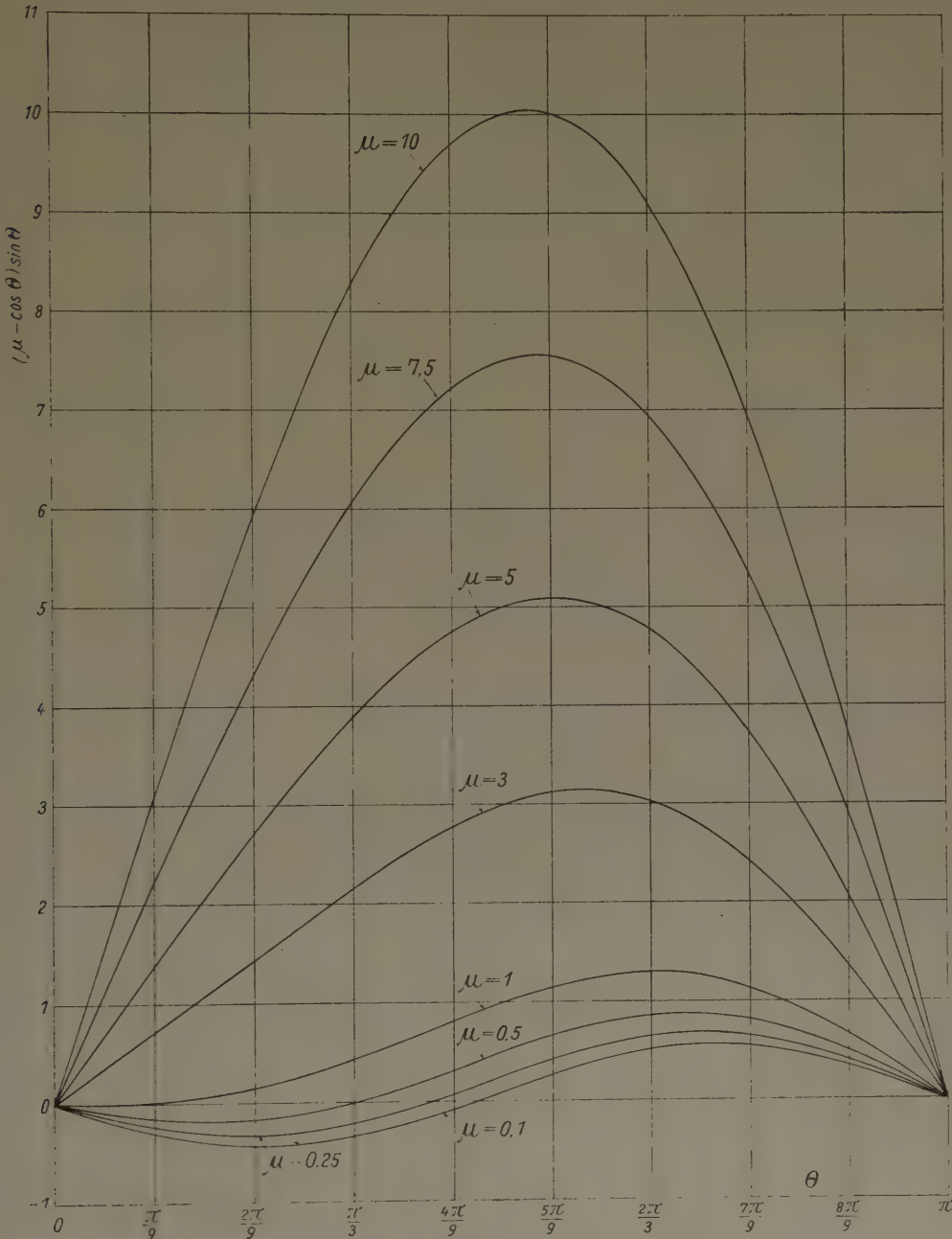


Bild 7. Charakter des Rückstellmomentes astatisch gelagerter, symmetrischer Kardankreisel

2. In der oben behandelten Phasenebene soll die FOUCAULTSche Regel behandelt werden. In Bild 6 sei ein astatisch gelagerter, symmetrischer KARDANKREISEL gezeichnet. x, y und z sind fest mit dem äußeren Ring verbundene Koordinatenachsen und e_1, e_2 bzw. e_3 bezeichnen die Einheitsvektoren in den Richtungen der mit dem Innenring fest verbundenen Koordinatenachsen. Θ bezeichnet den Winkel zwischen e_3 und z -Achse.

Wenn der äußere Ring gezwungen wird, sich um die z -Achse zu drehen, dann ändert sich der Winkel Θ nach der FOUCAULTSchen Regel. Den Vorgang der Änderung des Winkels Θ beschreibt die Gleichung [5]

$$\frac{d^2 \Theta}{d \tau^2} + (\mu - \cos \Theta) \sin \Theta = 0 \quad \dots \dots \dots (10),$$

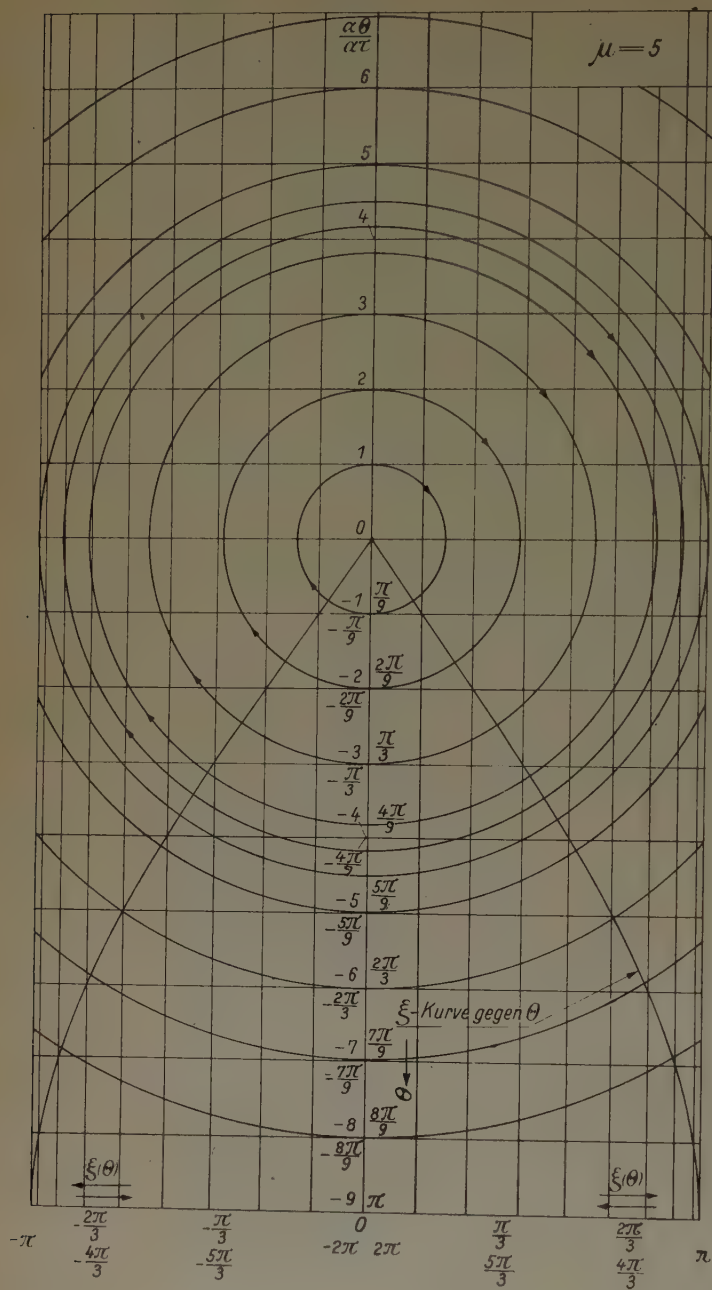


Bild 8. Die Phasenebene und die Energiekurve für das System, dessen Bewegungsgleichung $\frac{d^2\theta}{dt^2} + (\mu - \cos \theta) \sin \theta = 0$ ist

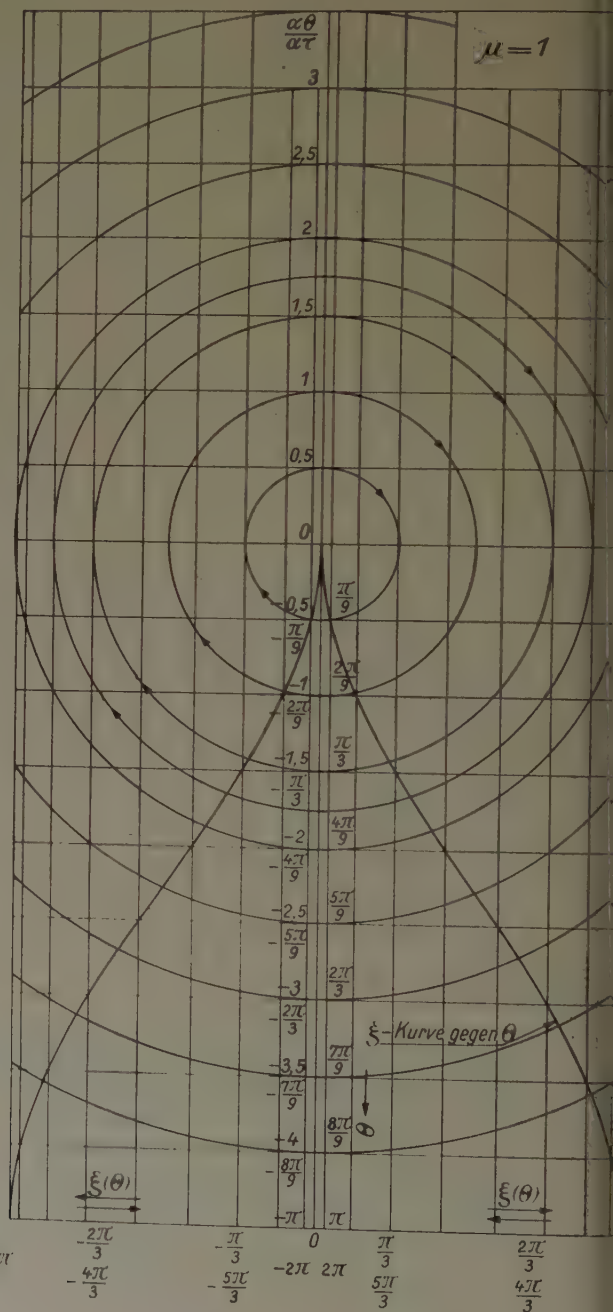


Bild 9. Die Phasenebene und die Energiekurve für das System, dessen Bewegungsgleichung $\frac{d^2\theta}{dt^2} + (\mu - \cos \theta) \sin \theta = 0$ ist

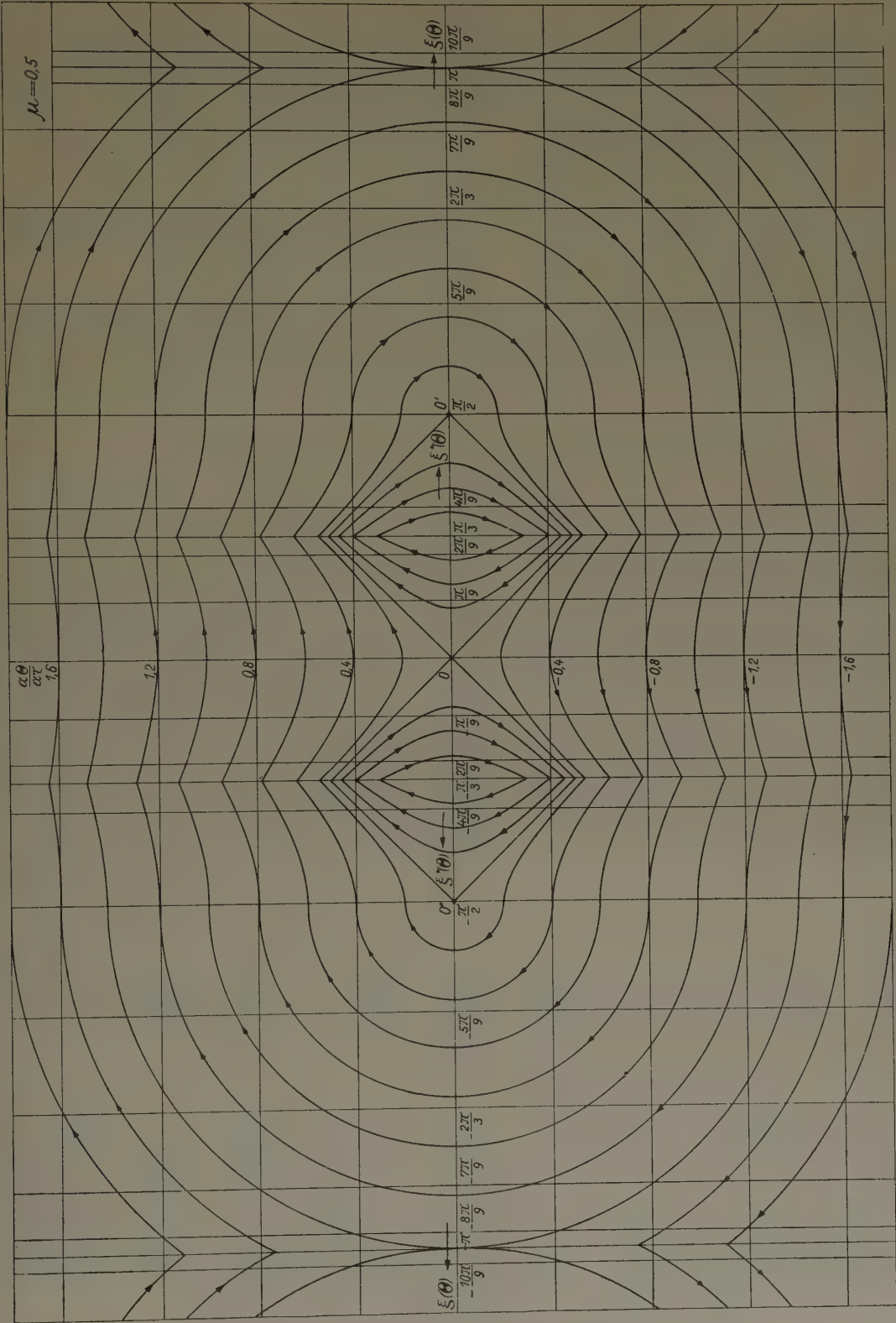


Bild 10. Die durch Spiegelung entwickelte Phasenebene und die Energiekurve für das System, dessen Bewegungsgleichung $\frac{d^2\theta}{dt^2} + (\mu - \cos \theta) \sin \theta = 0$ ist

worin $\tau = \omega_s t$ und t die physikalische Zeit ist. Der Parameter μ sei

$$\mu = \frac{T_F \omega_s}{T_K \omega_z} \dots \dots \dots (11),$$

worin T_F bzw. T_K die Drehmassen um die Figurenachse bzw. um die Knotenachse bezeichnen. ω_s ist die sogenannte „spin velocity“ des Rotors und ist gleich $\omega_e + \omega_z \cos \Theta_e$, worin ω die Eigendrehgeschwindigkeit des Rotors ist. In unserer Berechnung ist diese „spin velocity“ als konstant angenommen. In Bild 7 ist der Charakter des Rückstellmomentes gezeichnet. In den Bildern 8, 9 und 10 sind die Phasenkurven für $\mu = 5, 1$ bzw. $0,5$ in unseren Phasenebenen gezeichnet.

Literatur

- [1] R. GRAMMEL, Der Kreisel Bd. I, S. 61 und Bd. II, S. 87. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1950, Springer-Verlag.
- [2] K. KLOTTER, Technische Schwingungslehre Bd. I, S. 133. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1951, Springer-Verlag.
- [3] J. J. STOKER, Nonlinear Vibrations, S. 18. New York 1950, Interscience Publishers.
- [4] H. KAUDERER, Nichtlineare Mechanik, S. 195. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1958, Springer-Verlag.
- [5] R. GRAMMEL, Der Kreisel, Bd. I, S. 61. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1950, Springer-Verlag.

Anschrift: a. o. Prof. R. KAWAI, Nishinomiya-shi, Kanno-cho 8, Japan

Zur Dynamik des Preßlufthammers

Von H. NEUBER

Der dynamische Vorgang im Preßlufthammer (bisher nur Gegenstand von rohen Näherungsbetrachtungen) wird durch Einführung eines Viermassensystems als Gedankenmodell einer exakten dynamischen Theorie zugänglich gemacht. Die vier, in relativer Translationsbewegung zueinander befindlichen Massen sind: Hammerkörper, Kolben, Meißel und Handgriff (durch Berücksichtigung einer Abfederung des Handgriffes wird auch die Möglichkeit einer Rückstoßminderung in Betracht gezogen). Die über Steuerorgane wirkende periodische Kraft des Luftdruckes wird als FOURIER-Reihe eingeführt. Für die Zeitfunktionen der Bewegungskordinaten der einzelnen Massen ergeben sich außer linearen und quadratischen Gliedern ebenfalls FOURIER-Reihen, deren Koeffizienten sich aus den Bewegungsgleichungen errechnen lassen, wobei zwei Stoßvorgänge zu berücksichtigen sind: 1. Stoß des Kolbens auf den Meißel, 2. Stoß des Hammerkörpers auf den Meißelbund. Die zugehörigen beiden Zeitpunkte sind Sprungstellen der Geschwindigkeitsfunktionen von Kolben und Hammerkörper, die entsprechenden Bedingungen lassen sich durch Einführung von Stoßzahlen angeben. Die Ergebnisse werden an Hand von Zahlenbeispielen und Diagrammen diskutiert. Ausführlicher Aufsatz folgt demnächst in dieser Zeitschrift.

Anschrift: Prof. Dr.-Ing. H. NEUBER, Starnberg bei München, Max-Emanuel-Straße 10

Small Damped Vibrations of Homogeneous Torsional System with Double Static Constraints

By DANILO RAŠKOVIĆ

Small vibrations of a homogeneous torsional system, doubly coupled statically, considering also the influence of damping, are analysed. The system considered consists of a set of flywheel attached on a light shaft with a spring and a dashpot between each flywheel and the ground.

The kinetic and potential energies and the dissipation function of a system which performs small vibrations are homogeneous quadratic forms in the generalized velocities ($\dot{q} = \dot{\theta}$) and coordinates ($q = \theta$) respectively, with constant coefficients [1], namely

$$2 T = (\dot{q}) A \{\dot{q}\}, 2 V = (q) (C + C') \{q\}, 2 \Phi = (\dot{q}) B \{\dot{q}\} \dots \dots \dots (1)$$

Here $A = (a_{ik} = J_k)$ represents the diagonal inertia matrix, $C = (c_{ik} = c_k)$ the torsional shaft rigidity matrix, $C' = (c'_k)$ the stiffness matrix of the spring stiffness reduced to the equivalent torsional rigidity, and $B = (b_k)$ the dissipative matrix; $\{q\}$ is the column matrix and (q) the row matrix, [2].

By LAGRANGE's equations, the system of differential equations of motion may be written in the matrix form

$$\mathbf{A}\{\ddot{\theta}\} + \mathbf{B}\{\dot{\theta}\} + (\mathbf{C} + \mathbf{C}')\{\theta\} = \{0\} \quad (2).$$

In the special case of a homogeneous system, in which case the coefficients of the matrices are given by $a_{ii} = J$, $c_k = c$, $c'_k = c'$, $b_k = b$, $k = 1, 2, \dots, n$, using the ratios $\nu_0 = c_0/c$, $\nu_n = c_n/c$, $c/J = p$, $c'/J = q$, $b/J = 2\delta$ the above equation becomes

$$\mathbf{I}\{\ddot{\theta}\} + 2\delta\mathbf{I}\{\dot{\theta}\} + p\mathbf{J}\{\theta\} + q\mathbf{I}\{\theta\} = \{0\} \quad (3),$$

where \mathbf{I} is the unit matrix and \mathbf{J} the JACOBI's matrix with three diagonal rows.

To solve this system we assume that $\{\theta\} = \{r\}(\exp \lambda t)$, where $\{r\}$ is the complex amplitude matrix and $\lambda = -\delta + \omega i$ the eigenvalue. The problem is then reduced to one of characteristic values, [3], and the characteristic equation is

$$\Delta_n(\lambda) = |(\lambda^2 + 2\delta\lambda + q)\mathbf{I} + p\mathbf{J}| = 0 \quad \text{or} \quad \Delta_n(x) = |x\mathbf{I} + \mathbf{J}| = 0 \quad (4).$$

For the three characteristic cases: a) shaft with free ends, b) shaft with built-in ends and c) shaft with one end built-in, other end free, it is shown that the characteristic equations can be found by the use of formulae of regression obtained by simple expansion of the determinants. For the second case ($\nu_0 = \nu_n = 1$) one obtains

$$\Delta_n^{(b)}(x) = (x+2)\Delta_{n-1}^{(b)} - \Delta_{n-2}^{(b)} = P_n(x) = \sum_0^n B_{n-r} x^{n-r} = 0 \quad (5).$$

The coefficients B_{n-r} of the polynomials are connected by relations

$$B_{n-r}^{(n)} = 2B_{n-r}^{(n-1)} + B_{n-1-r}^{(n-1)} - B_{n-r}^{(n-2)},$$

with

$$B_n^{(n)} = 1, \quad B_0^{(n)} = n+1, \quad B_{n-1}^{(n)} = 2n; \quad B_{n-2}^{(n)} = (2n-3)n+1, \dots$$

These coefficients form a diagonal series of numbers whose differences are $\Delta^r = 2r$; $\Delta^{r+1} = 0$; r is the index of the row.

The case in which both ends are clamped is the basic one, since for the other two cases may be deduced from the equation for this case, namely

$$\Delta_n^{(a)} = x\Delta_{n-1}^{(b)} = 0; \quad \Delta_n^{(c)} = (x+1)\Delta_{n-1}^{(b)} - \Delta_{n-2}^{(b)} = 0 \quad (6).$$

The coefficients of these polynomials are calculated in all cases for $n = 1$ to $n = 10$.

The method of finite-difference equations of second order may be used here also, [4]. From the equation $(x\mathbf{I} + \mathbf{J})\{r\} = \{0\}$ one becomes the system of the ordinary equations

$$A_{k-1} - (2+x)A_k + A_{k+1} = 0 \quad (7)$$

with the boundary conditions

$$[x + (1 + \nu_0)]A_1 - A_2 = 0, \quad A_{n-1} - [x + (1 + \nu_n)]A_n = 0 \quad (8).$$

The use of the method of the frequency functions is made, [5], and introducing an auxiliary angle $2+x = 2\cos\varphi$, supposing the solution in the form $A_k = A\cos k\varphi + B\sin k\varphi$, the relation between the eigenvalue and this angle is given in form of the determinant

$$\Delta = f_0 \sin(n-2)\varphi - f_0 f_n \sin(n-1)\varphi + f_n \sin(n-2)\varphi - \sin(n-3)\varphi = 0 \quad (9),$$

with

$$f_0 = x + (1 + \nu_0), \quad f_n = x + (1 + \nu_n).$$

In the three special cases mentioned above, one obtains [6, 7]:

$$a) \nu_0 = \nu_n = 0; \quad f_0 = f_n = x+1 = 2\cos\varphi - 1,$$

$$2\sin n\varphi \cdot (1 - \cos\varphi) = 0; \quad \varphi_s = \frac{s\pi}{n}, \quad s = 1, 2, \dots, (n-1),$$

$$b) \nu_0 = \nu_n = 1; \quad f_0 = f_n = 2+x = 2\cos\varphi,$$

$$\sin(n+1)\varphi = 0; \quad \varphi_s = \frac{s\pi}{n+1}; \quad s = 1, 2, \dots, n \quad (10),$$

$$c) \nu_0 = 0; \nu_n = 1; \quad f_0 = x+1 = 2\cos\varphi - 1, \quad f_n = x+2 = 2\cos\varphi,$$

$$\sin(n+1)\varphi - \sin n\varphi = 2\cos\frac{2n+1}{2}\varphi \cos\frac{\varphi}{2} = 0.$$

In the case of the system without the damping ($b = 0$) the characteristic value is $\lambda = i \omega$, and the equations (10) remain the same, [8].

The several mathematical relations are then deduced, [9].

Further, the stationary state of motion is treated, when the first flywheel is subjected to the perturbing moment, $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M} (\exp i \Omega t)$. Supposing the solution in the form $C_k = S_k (\exp i \alpha_k)$, where C_k is the complex amplitude, $C_k = A \cos k \psi + B \sin k \psi$, one obtains the relation and the determinant

$$\left. \begin{aligned} C_{k-1} - 2 C_k \cos \psi + C_{k+1} &= 0, & 2 \cos \psi &= 2 + (q + 2 \delta i \Omega - \Omega^2) p^{-1}, \\ \Delta &= a b \sin (n-1) \psi - a \sin (n-1) \psi - b \sin (n-2) \psi + \sin (n-3) \psi \end{aligned} \right\} \quad (11),$$

where are $a = 2 \cos \psi - (1 - r_0)$, $b = 2 \cos \psi - (1 - r_n)$. The amplitude are calculated

$$A = h(p \Delta)^{-1} [b \sin n \psi - \sin (n-1) \psi]; \quad B = -h(p \Delta)^{-1} [b \cos n \psi - \cos (n-1) \psi], \\ h = \mathfrak{M}/J.$$

The case when the system is in beginning at rest ($t = 0$) and then acts one perturbing moment on one flywheel is discussed also using LAPLACE transforms, [10].

References

- [1] E. T. WHITTAKER, A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies. 4th ed. Cambridge 1937.
- [2] FRAZER, DUNCAN, COLLAR, Elementary Matrices. Cambridge 1946.
- [3] COLLATZ L., Eigenwertprobleme, Chelsea Publ. Co. New York 1948.
- [4] KARMAN TH., BIOT M., Mathematical Methods in Engineering. New York 1940.
- [5] BIEZENO C. B., GRAMMEL R., Technische Dynamik, Berlin 1939: Springer.
- [6] WEIGAND A., Die gedämpfte homogene Schwingungskette, ZAMM 38 (1958), 28—39.
- [7] WEIGAND A., Die homogene Schwingungskette mit innerer und äußere Dämpfung. Wiss. Z. Hochschule Elektr. 4 S. 19—24 Ilmenau 1958.
- [8] RAŠKOVIĆ D., On some characteristics of the frequency equations of small vibrations of some particular holonomic conservative systems. Quart. Journal of Mech. and Appl. Math. 9, 3, Sept. (1956), Oxford.
- [9] RAŠKOVIĆ D., On some characteristics of the frequency equation of small vibrations of holonomic conservative systems with static couplings. Quart. of Appl. Mathematics 14 3, Oct. (1956).
- [10] SNEDDON I., Fourier Transforms. New York 1951: McGr.-Hill B. Comp.

Anschrift: Dr.-Ing. Dipl. Math. DANILO RAŠKOVIĆ, Timočka 46, Belgrad, Jugoslawien

Very Low Frequency Vibration Recorder

By J. RASQUINET

The recorder here described is designed so as to record mechanical vibrations on a cathode-rays tube, either as a function of time or in the phase-plan, when the frequency of the vibrations is very low, say, some cycles per second.

When a steady point is available near the vibrating body, a "relative transducer" may be used, generally a coil which moves through a magnetic field; the frame of the transducer is tightened to the steady point and the coil linked to the vibrating body. But this is not always the case and, moreover magnetic transducers are not suitable for very low frequencies. So an "absolute transducer" has been used. It consists of a mass linked to the frame of the transducer by means of a spring and allowed to move only in the working direction of the spring. The frame is linked to the vibrating engine.

When the frame is given an absolute displacement

$$X = \sum A_n \cos (n \omega t - \varphi_n)$$

the displacement of the mass is:

$$x = \frac{g \cos \alpha}{\omega_0^2} + \sum K_n A_n \cos (n \omega t - \varphi_n - \theta_n)$$

where:

$$K_n = \frac{(n \Omega)^2}{\sqrt{[1 - (n \Omega)^2]^2 + [2 n_a n \Omega]^2}},$$

$$\Omega = f/f_0,$$

f is the fundamental frequency of the vibration,

f_0 is the resonance frequency of mass and spring,

n_a is the mechanical damping.

This general relation can be used in two particularly interesting cases. The first one is when: $\Omega \gg 1$; $K_n \simeq 1$; $\theta_n \simeq \pi$

$$x = -\frac{g \cos \alpha}{\omega_0^2} - X.$$

The relative displacement is linearly related to the absolute one. This type of transducer named "vibrograph" is not convenient here because, since f is very low, f_0 must be still lower which means that the mass must be very heavy. The other interesting case is when: $n \Omega \ll 1$; $K_n = (n \Omega)^2$; $\theta_n = 0$

$$x = -\frac{g \cos \alpha}{\omega_0^2} - \frac{1}{\omega_0^2} \sum A_n (n \omega)^2 \cos (n \omega t - \phi_n)$$

$$x = -\frac{g \cos \alpha}{\omega_0^2} - \frac{1}{\omega_0^2} \sum \frac{d^2 X_n}{dt^2}$$

and the relative movement is linearly related to the second derivative, or acceleration, of the absolute one; that is why that transducer is named "accelerograph".

In practice the mass is a rectangular plate linked to the frame by means of a loop so as to forbid any transversal displacement. The springs mentioned above are four wires held between rods fixed in the frame and the plate. The mass is very light (4 grams) and the springs are strong so that the resonance frequency is high: 250 cps. The condition stated above for the transducer to be an **accelerograph** is thus fulfilled.

The wires are in fact strain-gauges wires so that the displacement can be measured: their electric resistance is related to their length. They are connected in a bridge circuit fed with a known voltage. The very low output voltage has to be amplified. A direct current amplifier has not been chosen because the very low voltage involved requires the use of a drift corrector; a **carrier frequency amplifier** has been preferred.

The modulation is obtained by using an oscillator to feed the bridge and by putting a resistor in parallel on one arm. So the bridge is originally unbalanced and the resulting voltage is either increased or reduced, depending on the direction of the displacement. The gain of the alternating current amplifier must of course not depend upon the time as would do the gain of an ordinary amplifier due to changes in supply voltage, changes in heating current, or ageing of the tubes. So a **feed-back amplifier** is necessary.

The demodulator following the alternating current amplifier is a diode detector which gives not only the low frequency component of the modulated voltage, but a direct current component too; in order to get rid of this direct current component, an equal one of reverse polarity is opposed to it.

After filtering, the voltage must be integrated twice so as to transform the second derivative of the function into the function itself. This can be done with a direct current amplifier and a feedback network. This network has been chosen so as to integrate twice as required and so as to **provide not only the function but also its first derivative**.

Between the demodulator and the integrator lies a filter. A low-pass filter is necessary because an assumption was made about the value of K_n which practically means that the presence of the resonance curve has been neglected. The filter is a high-pass one too so as get rid of a direct current component which can not be completely avoided at the demodulator output. The filter, which is thus a band-pass filter, is a direct current amplifier with a selective feedback network; a slope of 60 decibels per decade can be reached.

This recorder has been used for the recording of vibrations in connection with an engine for study of non linear mechanics theory which Professor FORBAT has designed. The vibration has an amplitude of approximately 5 mm and a frequency of 3 cps. The recordings are, as was required, directly given in the phase-plan by applying the function and its first derivative to both channels of a cathode-rays tube.

The results are not exactly what they ought to be: a flat portion on the top of the curve does not appear. The reason is that the phase-lag of the filter increases very rapidly with the frequency; this is due to the high slope of the attenuation curve as can be shown by the BODE relation. So the phase-lag of the filter is high as far as harmonics are concerned but unfortunately this vibration contains heavy higher harmonics! This trouble will probably be overcome in the next weeks by using a phase detector which produces no direct current component in order to avoid the need of the high-pass part of the filter. On the other hand, the frequency (3 cps) being small compared with the resonance frequency 250 cps the low-pass part of the filter too becomes unnecessary. So the filter will be suppressed and better results can be expected.

I wish to express my thanks to Professors COGNEAUX and DELATTRE who have much helped me in doing this diploma-work at the Faculté Polytechnique of Mons.

Anschrift: Dipl.-Ing. J. RASQUINET, 71 rue des Remparts, Marchienne-au-Pont, Hainaut, Belgien

Stabilitätskriterien für ein lineares System mit veränderlichen Parametern

Von ROLF REISSIG

Zunächst betrachten wir eine Differentialgleichung der allgemeinen Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad \dots \dots \dots (1),$$

wo $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ und $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ n -dimensionale Vektoren sein sollen. Die Gleichung (1) besitze die triviale Lösung $\mathbf{x} \equiv 0$, d. h.

$$0 = \mathbf{f}(0, t) \quad \dots \dots \dots (2).$$

Die n Funktionen $f_i(\mathbf{x}, t)$ seien im Bereich

$$|\mathbf{x}| \leq H, t \geq t_0 \quad \dots \dots \dots (3)$$

des \mathbf{x} -Raumes stetig und so beschaffen, daß zu einer beliebig vorgegebenen Anfangsbedingung (\mathbf{x}_0, t_0) aus (3) eine eindeutig bestimmte Lösung $\mathbf{x}(t)$; $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ gehört.

Wir interessieren uns für die asymptotische Stabilität der Nulllösung und entnehmen aus [3] folgendes Kriterium:

Die Nulllösung ist **asymptotisch stabil**, wenn es eine positiv-definite, gleichmäßige kleine Funktion $V(\mathbf{x}, t)$ [mit stetigen partiellen Ableitungen $\partial V/\partial x_i$ und $\partial V/\partial t$] gibt, bei der die totale zeitliche Ableitung vermöge (1)

$$V' = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial V}{\partial t}$$

die Gestalt

$$- \varphi(t) \cdot W(\mathbf{x}, t)$$

$$[W(\mathbf{x}, t) \text{ positiv-definit, } \varphi(t) \geq 0, \int_{t_0}^{\infty} \varphi(t) dt = \infty] \quad \dots \dots \dots (4)$$

annimmt.

Beweis: Da die Voraussetzungen des LJAPUNOWSchen Hauptsatzes über die Stabilität bei instationären Bewegungen [4] erfüllt sind, ist die triviale Lösung stabil, d. h. $|\mathbf{x}(t)| \leq \varepsilon$ für $t \geq t_0$, falls $|\mathbf{x}_0| \leq \delta(\varepsilon)$. Setzt man $\varepsilon = H$ und $\delta_0 = \delta(H)$, so hat man man längs jeder Lösung mit $|\mathbf{x}_0| \leq \delta_0$ die Abschätzung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V[\mathbf{x}(t), t] = V_{\infty} \leq V[\mathbf{x}(t), t] = V_0 - \int_{t_0}^t \varphi(t) W[\mathbf{x}(t), t] dt; \quad V_0 = V(\mathbf{x}_0, t_0).$$

Weil V gleichmäßig klein ist, existiert im Fall $V_{\infty} > 0$ eine positive Schranke $h < H$, so daß $|\mathbf{x}(t)| \geq h$ und demnach $W[\mathbf{x}(t), t] \geq m > 0$ für $t \geq t_0$. Dann ergibt sich

$$V[\mathbf{x}(t), t] \leq V_0 - m \int_{t_0}^t \varphi(t) dt \rightarrow -\infty \text{ für } t \rightarrow \infty.$$

Das ist aber ausgeschlossen. Deshalb gilt $V_{\infty} = 0$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = 0$, da V positiv-definit ist.

Den bewiesenen Satz wollen wir anwenden, um für die triviale Lösung $\mathbf{x} = \mathbf{y} = 0$ des linearen Systems 2. Ordnung

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t)y, \quad \frac{dy}{dt} = c(t)x + d(t)y \quad \dots \dots \dots (5)$$

hinreichende Kriterien der asymptotischen Stabilität im Ganzen aufzustellen. Das ist schon in [2] mit Hilfe des Hauptsatzes über die asymptotische Stabilität bei instationären Bewegungen [4] versucht worden [5]. Die Koeffizienten des Gleichungssystems (5) seien für $t \geq t_0$ stetig und beschränkt, ebenso die Ableitungen der Größen A, B, C , die wir aus ihnen bilden.

Wir setzen

$$D(t) = a d - b c$$

$$A(t) = D + (c^2 + d^2), \quad B(t) = -a c - b d, \quad C(t) = D + (a^2 + b^2)$$

$$[A C - B^2 = D (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)].$$

Die quadratische Form

$$V = A x^2 + 2 B x y + C y^2 \quad (6)$$

ist unter der Voraussetzung $D > 0$ bei festem $t \geq t_0$ eine positiv-definite Funktion von x und y . Fordern wir sogar

$$D(t) \geq \varrho > 0 \text{ für } t \geq t_0 \quad (7),$$

so ist $V(x, y, t)$ für alle x, y und $t \geq t_0$ positiv-definit und wird obendrein gleichmäßig klein.

Die Matrix $\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ besitzt nämlich zwei beschränkte positive Eigenwerte λ, μ ($\lambda \leq \mu$), wobei wegen (7)

$$\lambda \mu = A C - B^2 \geq \varrho^2/2, \text{ also } \lambda(t) \geq \sigma > 0 \text{ für } t \geq t_0 \quad (8);$$

folglich schätzt man ab

$$V(x, y, t) \geq \lambda(t) (x^2 + y^2) \geq \sigma (x^2 + y^2) \quad (9).$$

Man berechnet nun

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} (a x + b y) + \frac{\partial V}{\partial y} (c x + d y) &= -2 p D (x^2 + y^2) \\ (p &= -a - d) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

und

$$\left. \begin{aligned} V' &= -[(2 p D - A') x^2 - 2 B' x y + (2 p D - C') y^2] \\ &= -\varphi(t) \cdot (L x^2 + 2 M x y + N y^2) \end{aligned} \right\} \quad (11),$$

wobei $\varphi(t)$ geeignet gewählt wird.

Um für V' die Darstellung (4) zu erhalten, fordern wir, daß L, M und N beschränkte stetige Funktionen von t sind und zusammen mit $\varphi(t)$ den Bedingungen gehorchen:

$$\varphi(t) \geq 0, \quad \int_{t_0}^{\infty} \varphi(t) dt = \infty, \quad L(t) > 0, \quad L N - M^2 \geq \varrho > 0 \quad (12).$$

Dann erfüllt die quadratische Form V die Voraussetzungen des eingangs erwähnten Satzes, und die Nulllösung von (5) ist asymptotisch stabil im Ganzen.

Zum Schluß betrachten wir noch zwei Beispiele, bei denen die erwähnten Stabilitätsbedingungen erfüllt sind.

$$1. \quad x' = -|\sin t| x + |\cos t| y, \quad y' = -|\cos t| x - |\sin t| y.$$

Hier ist

$$D = 1; \quad A = C = 2, \quad B = 0$$

$$V(x, y, t) = 2(x^2 + y^2)$$

$$\varphi = 2 p = 2 |\sin t|, \quad L = N = 2, \quad M = 0$$

$$V' = -2 |\sin t| \cdot V.$$

$$2. \quad x'' + t^{-c} x' + x = 0; \quad 0 \leq c \leq 1, \quad t_0 = 1$$

oder

$$x' = y, \quad y' = -x - t^{-c} y.$$

Hier ist

$$D = 1; \quad A = 2 + t^{-2c}, \quad B = t^{-c}, \quad C = 2$$

$$V(x, y, t) = (2 x^2 + y^2) + (t^{-c} x - y)^2$$

$$\varphi = 2 t^{-c}, \quad L = 1 + c t^{-c-1}, \quad M = -c t^{-1/2}, \quad N = 1$$

$$L N - M^2 = 1 + c t^{-c-1} (1 - c t^{-1/4}).$$

Literatur

- [1] L. CESARI, Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1959, Springer-Verlag.
- [2] W. CHABASACHAL, Über die Stabilität linearer Differentialgleichungssysteme zweiter Ordnung. Trud. Sekt. Mat. Mech., Akad. Nauk Kasach. SSR 1 (1958), S. 46—49.
- [3] W. HAHN, Theorie und Anwendung der direkten Methode von Ljapunov. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1959, Springer-Verlag.
- [4] I. G. MALKIN, Theorie der Stabilität einer Bewegung. Berlin 1958, Akademie-Verlag.
- [5] R. REISSIG, Über die Stabilität linearer Differentialgleichungssysteme zweiter Ordnung. Monatsber. Dt. Akad. Wiss. 2 (1960).
- [6] SANSONE — CONTI, Equazioni Differenziali Non Lineari. Rom 1956, Edizioni Cremonese.

Anschrift: Prof. Dr. ROLF REISSIG, Inst. f. Angew. Math. u. Mech. d. D.A.W., Berlin W8, O.-Nuschke-Str. 22/23

Zum Beweis dieser Behauptung braucht man nur einzusehen, daß, falls die Matrix \mathfrak{A} in der Gleichung (1) eine unechte Schachbrettmatrix n -ter Art und $\omega^2 > \lambda_{\max}$ ist, wo λ_{\max} die größte Wurzel der charakteristischen Gleichung $|\mathfrak{C}\lambda - \mathfrak{A}| = 0$ ist, die reziproke Matrix $(\mathfrak{A} - \mathfrak{C}\omega^2)^{-1}$ in der Lösung (2) eine echte Schachbrettmatrix n -ter Art sein wird. Der Beweis beruht auf der einfachen Tatsache, daß eine unechte Schachbrettmatrix einer nichtnegativen Matrix ähnlich ist: $\mathfrak{D}\mathfrak{A}\mathfrak{D}^{-1} = \mathfrak{B}$, wo \mathfrak{B} nichtnegativ und \mathfrak{D} eine aus den Elementen $+1$ und -1 bestehende und eine solche Transformation ergebende Diagonalmatrix ist. Wird nämlich die reziproke Matrix $(\mathfrak{C}\omega^2 - \mathfrak{A})^{-1}$ dieser Transformation unterworfen, so folgt

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{C}\omega^2 - \mathfrak{A})^{-1}\mathfrak{D}^{-1} = (\mathfrak{C}\omega^2 - \mathfrak{B})^{-1} = \frac{1}{\omega^2} \left(\mathfrak{C} - \frac{1}{\omega^2} \mathfrak{C}^{-1} \mathfrak{B} \right)^{-1} \mathfrak{C}^{-1}.$$

Die dabei auftretende reziproke Matrix $\left(\mathfrak{C} - \frac{1}{\omega^2} \mathfrak{C}^{-1} \mathfrak{B} \right)^{-1}$ kann im Falle $\omega^2 > \lambda_{\max}$ in eine konvergente Potenzreihe entwickelt werden. Da \mathfrak{B} eine nichtnegative und irreduzible Matrix ist, wird die so erhaltene reziproke Matrix infolge eines bekannten Satzes ([1] S. 46) positiv (siehe noch [4]). Wird obige Transformation wieder angewandt, so ergibt sich, daß die reziproke Matrix $\left(\mathfrak{C} - \frac{1}{\omega^2} \mathfrak{C}^{-1} \mathfrak{A} \right)^{-1}$ eine echte Schachbrettmatrix n -ter Art ist.

Es soll bemerkt werden, daß dieselbe Eigenschaft auch für beliebige, aus Gitterpunkten bestehende Gebiete gilt. Der Beweis ist auf derselben Weise durchführbar, nur muß das gegebene Gebiet unter Hinzufügung festgehaltener Punkte zu einem n -dimensionales Parallelepipèd ergänzt werden.

Als einfache Beispiele solcher Systeme erwähnen wir Systeme mit potentieller Energie folgender Formen:

$$\begin{aligned} 1) \quad & V = \frac{1}{2} \sum_i k_i (\Delta^2 x_i)^2 \\ 2) \quad & V = \frac{1}{2} \sum_{i,j} k_{ij} \{ (\Delta_i x_{ij})^2 + (\Delta_j x_{ij})^2 \} \quad \begin{aligned} \Delta_i x_{ij} &= x_{i+1,j} - x_{ij} \\ \Delta_j x_{ij} &= x_{i,j+1} - x_{ij} \end{aligned} \\ 3) \quad & V = \frac{1}{2} \sum_{i,j} k_{ij} \{ \Delta_i^2 x_{ij} + \Delta_j^2 x_{ij} \}^2 \end{aligned}$$

Im Falle $k_i = k$ gehört zu 1) eine Matrix, welche die vierten Differenzen erzeugt. Dieser Fall entspricht einem korpuskularen Balkenmodell. Im Falle $k_{ij} = k$ gehören zu 2) bzw. 3) Matrizen, welche als finite Analoga des LAPLACESchen bzw. biharmonischen Differentialoperators betrachtet werden können. Diese Fälle entsprechen dem korpuskularen Membran- bzw. Plattenmodell.

Literatur

- [1] F. R. GANTMACHER, Matrizenrechnung, Teil II, Berlin 1959, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.
- [2] E. G. ROUTH, The Advanced Part of a Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies, Part II. London 1884. Macmillan.
- [3] П. РОЖА (P. RÓZSA), О применении клеточных матриц в механике корpusкулярных систем. Успехи математических наук 14 вып. 4 (88) (1959), S. 207—211.
- [4] R. S. VARGA, On a Lemma of Stieltjes on Matrices. Operated for the U.S. Atomic Energy Commission by Westinghouse Electric Corporation, Pittsburgh 1957.

Anschrift: Dr. P. RÓZSA, Budapest II, Pasaréti ut 45

Über den Einfluß von Störungskräften auf Beschränktheits- und Stabilitätseigenschaften dynamischer Systeme^{*)}

VON PETER SEIBERT

1. Aussagen über die Erhaltung der Stabilität einer Gleichgewichtslage x_e unter ständigen Störungen, die bei Annäherung an x_e verschwinden, finden sich u. a. bereits bei M. A. LJAPUNOV¹⁾. Dagegen wurde das allgemeinere Problem, bei dem die Störungen auch bei x_e selbst endlich blei-

^{*)} This research was partially supported by the U. S. Air Force Office of Scientific Research under Contract Number AF 49(638)-382.

¹⁾ Problème général de la stabilité du mouvement, Ann. Math. Studies 17, Princeton 1949 [Original 1893].

ben, erst in neuerer Zeit von MALKIN und GORŠIN behandelt²⁾. Schließlich untersuchte T. YOSHIZAWA die Erhaltung von Beschränktheitseigenschaften gegenüber Störungen³⁾.

In dieser Note skizzieren wir eine einheitliche Theorie der Beschränktheit und Stabilität unter Störungen, die verschiedene Verschärfungen der älteren Ergebnisse gestattet. Wir beginnen mit einem grundlegenden Satz über Beschränktheit und gewinnen aus ihm eine Charakterisierung der Stabilität unter Störungen durch das Stabilitätsverhalten des ungestörten Systems.

2. Unter einem allgemeinen dynamischen System [a. d. System] im n -dimensionalen euklidischen Raum E^n wollen wir folgendes verstehen: Jedem Punkt x_0 des E^n und jeder Zeit t_0 sei eine Bewegung $x(t; t_0, x_0)$ im E^n zugeordnet. Dabei sei x_0 der Anfangspunkt der zur Zeit t_0 beginnenden Bewegung:

$$x(t_0; t_0, x_0) = x_0.$$

Ferner setzen wir voraus: Ist x_1 derjenige Punkt, den die zur Zeit t_0 bei x_0 beginnende Bewegung zur Zeit $t_1 (> t_0)$ erreicht, also $x_1 = x(t_1; t_0, x_0)$, so gelte die Identität:

$$x(t; t_0, x_0) \equiv x(t; t_1, x_1).$$

3. Es sei \mathfrak{X} ein a. d. System, das durch die Einwirkung gewisser Störungen in ein zweites System $\tilde{\mathfrak{X}}$ übergehe. Die Bewegungen beider Systeme seien mit x und \tilde{x} bezeichnet. Als Maß für die Größe der Störung diene dabei eine positive Zahl δ mit der Eigenschaft, daß zwei Bewegungen x, \tilde{x} mit gleichen Anfangswerten t_0, x_0 sich innerhalb eines Zeitintervalles von fester Länge T um nicht mehr als δ voneinander entfernen⁴⁾:

$$|x(t; t_0, x_0) - \tilde{x}(t; t_0, x_0)| \leq \delta \quad (t_0 \leq t \leq t_0 + T) \quad \dots \quad (1).$$

Wir nennen jede solche (von t_0 und x_0 unabhängige) Zahl eine Störungsschranke⁵⁾.

4. Wir setzen nun die Existenz einer solchen Schranke voraus und fragen, unter welcher zusätzlichen Bedingung für das ungestörte System \mathfrak{X} eine Ungleichung der Form (1) für beliebig große Werte von t gilt. Zu diesem Zweck führen wir folgenden Begriff ein:

Sind ϱ, η, T drei positive Zahlen, so heißt ein a. d. System (ϱ, η, T) -beschränkt, falls jede Bewegung, die zu einer beliebigen Zeit t_0 an einem Punkt $|x_0| < \varrho$ beginnt, nach Ablauf der Zeit T innerhalb des Gebietes $|x| < \eta$ verbleibt:

$$|x(t; t_0, x_0)| < \eta \quad (t \geq t_0 + T).$$

Es gilt dann der folgende Satz:

Satz 1. Es seien \mathfrak{X} und $\tilde{\mathfrak{X}}$ zwei allgemeine dynamische Systeme und ϱ, η, δ, T positive Konstanten mit folgenden Eigenschaften:

(a) Die zu einer beliebigen Zeit t_0 in einem beliebigen Punkt x_0 des Gebietes $|x| < \delta$ beginnenden Bewegungen der Systeme $\mathfrak{X}, \tilde{\mathfrak{X}}$ genügen für alle t -Werte $t_0 \leq t \leq 2T$ der Ungleichung

$$|x(t; t_0, x_0) - \tilde{x}(t; t_0, x_0)| < \delta.$$

(b) Das System \mathfrak{X} ist (ϱ, η, T) -beschränkt.

(c) $\eta + \delta < \varrho$.

Das System $\tilde{\mathfrak{X}}$ ist dann $(\varrho, \eta + \delta, 2T)$ -beschränkt.

5. Bekanntlich wird die Eigenschaft der gleichmäßig-asymptotischen Stabilität (im Gegensatz zur gewöhnlichen oder schwachen Stabilität) durch kleine Störungen des Systems nur wenig beeinträchtigt. Tatsächlich gilt diese Unempfindlichkeitsaussage auch für den etwas allgemeineren (und einfacheren) Begriff der quasi-gleichmäßig asymptotischen Stabilität.

²⁾ I. G. MALKIN, Prikl. Mat. Mech. 8 (1944), S. 241—245 und „Theorie der Stabilität einer Bewegung“, Gosudarst. Isdat. Tech.-Teoret. Lit., Moskau-Leningrad 1952. [Deutsche Übersetzung: Akademie-Verlag, Berlin 1959] — S. GORŠIN, Izvest. Akad. Nauk Kasach. SSR 56, Ser. Mat. Mech. 2 (1948), S. 46—73. — Für eine zusammenfassende Darstellung aller bisherigen Resultate vgl. W. HAHN, Theorie und Anwendung der direkten Methode von Ljapunov, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1959, Springer-Verl., § 28.

³⁾ Mem. College of Sci., Univ. of Kyoto, Ser. A, 30 (1957), 91—103. und Funkcialaj Ekvacioj 2 (1959), S. 95—142.

⁴⁾ Mit $|x|$ bezeichnen wir den Abstand eines Punktes x im E^n vom Koordinatenursprung.

⁵⁾ Genügen die Systeme $\mathfrak{X}, \tilde{\mathfrak{X}}$ Differentialgleichungen der Form

$$\dot{x} = f(x, t), \quad \dot{\tilde{x}} = f(\tilde{x}, t) + h(\tilde{x}, t)$$

(x, \tilde{x}, f, h : n -Vektoren), wobei f eine Lipschitzbedingung erfüllt und f, h stetig sind, so existiert stets eine Störungsschranke [Vgl. E. KAMKE, Differentialgleichungen reeller Funktionen, 3. Aufl., Leipzig 1956, Akad. Verlagsges., S. 153].

Definitionen. Es sei $x_e = 0$ eine Gleichgewichtslage des a. d. Systems \mathfrak{X} , also $x(t; t_0, 0) \equiv 0$ für alle t_0 . Sie heißt quasi-gleichmäßig asymptotisch stabil, falls eine Zahl $\delta > 0$ existiert derart, daß es zu beliebig kleinem $\eta > 0$ einen positiven Wert T gibt, so daß $\mathfrak{X}(\delta, \eta, T)$ -beschränkt ist.

Die Gleichgewichtslage $x = 0$ soll stabil unter Störungen genannt werden, falls ein $\varrho > 0$ mit folgender Eigenschaft existiert: Zu jeder Zahl $\eta > 0$ gibt es zwei positive Zahlen T, δ derart, daß jedes gestörte System $\tilde{\mathfrak{X}}$, dessen Bewegungen mit Anfangspunkten in $|x| < \varrho$ sämtlich der Bedingung (1) genügen, (ϱ, η, T) -beschränkt ist.

Satz 2. Eine Gleichgewichtslage eines allgemeinen dynamischen Systems ist dann und nur dann stabil unter Störungen, wenn sie quasi-gleichmäßig asymptotisch stabil ist.

Die Notwendigkeit dieser Bedingung ist trivial. Ihre Hinlänglichkeit folgt leicht aus Satz 1.

Anschrift: Dr. P. SEIBERT, RIAS (Research Inst. for Advanced Study), 7212 Bellona Avenue, Baltimore 12, Md., USA

Beitrag zur Theorie der anisotonischen Belastung der Polymeren

Von JERZY ZAWADZKI

In meinen früheren Publikationen [1], [2], [3] und Referaten über die Dehnungshypothese und Anstrengung der sphärischen und linearen Polymeren, die ich z. B. während der GAMM-Tagungen in Saarbrücken (1958) und Hannover (1959) und auf dem Symposium IUTAM (Warszawa 1958) vorgetragen hatte, hatte ich u. a. das Schema einer neuen Methode (Asterisations-Spinnennetzmethode) der Analyse des Dehnungszustandes mittels der „Ablösung“ der rheonomischen Bindungen der inneren Struktur des visko-elastischen Stoffes dargestellt. Als Maß der Anstrengung hatte ich die Änderung der freien Energie angenommen. Insbesondere hatte ich zur Lösung des Problems die LAGRANGESchen Gleichungen angewandt.

Den wichtigen Teil dieses Schemas bildet die Bestimmung der rheonomischen Bindungsfunktionen und Reaktionen, die Analyse der reduzierten Steifigkeit und die Bestimmung der entsprechenden partiellen Ableitungen (insbesondere nach der Zeit t), die in den LAGRANGESchen Gleichungen stecken. Dem ist also dieses Referat gewidmet.

Mittels der Beziehungen zwischen der Bindungsreaktion \bar{R}_{ik} und ihren Komponenten \bar{N}_{ik} , \bar{T}_{ik} und auch zwischen ihren Richtungsversoren können wir in den weiteren Betrachtungen nur die Komponente \bar{N}_{ik} berücksichtigen:

$$\bar{N}_{ik}^* = \lambda_{ik} \nabla \Phi_{ik}^* = N_{ik} \{a_{rs}\} \bar{n}^{0*} \quad \dots \quad (1),$$

wobei * ein Spaltenvektor und

$$N_{ik} = C_{ik} [(\Delta \xi_i - \Delta \xi_k) l + (\Delta \eta_i - \Delta \eta_k) m + (\Delta \zeta_i - \Delta \zeta_k) n] \quad \dots \quad (2)$$

ist. (λ_{ik} -Lagrangische Multiplikatoren.)

Die geometrischen Beziehungen zwischen den Koordinatensystemen Oxyz und $S\xi\eta\zeta$ (S-Massenmittelpunkt) und die Gleichung (2) bilden ein System von Gleichungen, dessen Lösung die Differentialgleichungen

$$\frac{\lambda_{ik}}{C_{ik} K_x} \frac{\partial \Phi_{ik}}{\partial x_i} = K_x [x_i - x_k - D_1] + K_y [y_i - y_k - D_2] + K_z [z_i - z_k - D_3] \quad \dots \quad (3)$$

usw. ergibt. Die spezielle Form der in [2] erwähnten Gleichung (4) bildet

$$x_i - x_k - D - A \frac{\partial \Phi_{ik}}{\partial x_i} - B \frac{\partial \Phi_{ik}}{\partial y_i} - C \frac{\partial \Phi_{ik}}{\partial z_i} - E \frac{\partial \Phi_{ik}}{\partial t} = 0 \quad \dots \quad (4).$$

Als Folge der Integration mit Berücksichtigung der Randbedingungen bekommen wir die rheonomische Bindungsgleichung:

$$\begin{aligned} \Phi_{ik} &= \frac{C_{ik}}{2\lambda_{ik}} [K_x^2 x_i^2 + K_y^2 y_i^2 + K_z^2 z_i^2] + \frac{C_{ik}}{\lambda_{ik}} [K_x K_y x_i y_i + K_x K_z x_i z_i + K_y K_z y_i z_i] \\ &- \frac{C_{ik}}{\lambda_{ik}} [K_x x_i + K_y y_i + K_z z_i] \cdot 2a + 2a^2 \left(\frac{C_{ik}}{\lambda_{ik}} \right)^2 = 0 \quad \dots \quad (5). \end{aligned}$$

Anschließend bestimmen wir die entsprechenden partiellen Ableitungen wie z. B. $\frac{\partial u_i}{\partial t}$, $\frac{\partial u_i}{\partial q_j}$, $\frac{\partial \Phi_{ik}}{\partial t}$, $\frac{\partial \Phi_{ik}}{\partial u_i}$, die zur Elimination der Multiplikatoren λ_{ik} und zur Lösung der LAGRANGESchen Gleichungen der zweiten Reihe bezüglich x_i, \dots unentbehrlich sind.

Die LAGRANGESchen Multiplikatoren λ_{ik} eliminieren wir mittels des Systems der Differentialgleichungen

$$\{a_{\alpha\alpha*}\} \cdot \{\lambda_{\alpha}\}^* + \{C_{\alpha*}\}^* = \{0\}^* \quad \dots \quad (6),$$

wo

$$a_{\alpha\alpha*} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{m} \nabla_i \Phi_{\alpha} \nabla_i \Phi_{\alpha*}, \quad C_{\alpha*} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i} \nabla_i \Phi_{\alpha*} \bar{F}_i + L(\Phi_{\alpha*}).$$

Für die Bestimmung der reduzierten Steifigkeit und ihrer Ableitung $\frac{\partial c_{ik}}{\partial t}$ führen wir das 5-Parameter-Modell ein, das die visko-elastischen Eigenschaften des Stoffes berücksichtigen soll. Wir bekommen also die BOLTZMANN-VOLTERRA-Gleichung

$$e(t) = \frac{1}{c(t)} R(t) = R(t) \left[\frac{1}{H} + \frac{H-E}{H^2 n} \int_0^t \omega(t, \tau) \cdot K(t, \tau) d\tau \right] \quad \dots \quad (7),$$

wo

$$\omega(t, \tau) = \frac{R(\tau)}{R(t)} \quad \dots \quad (7a)$$

der Koeffizient der Anisotonie der Belastung ist.

Die reduzierte Steifigkeit in der Richtung R_{ik} bestimmen wir aus der Gleichung

$$c_{ik} = c_0 \kappa_{ik} = c_0 \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi [\sigma_\xi \lambda_{\xi*}^2 + \sigma_\eta \mu_{\eta*}^2 + \sigma_\zeta \nu_{\zeta*}^2] [\lambda_{\xi*} \lambda_0 + \mu_{\eta*} \mu_0 + \nu_{\zeta*} \nu_0] d\lambda d\mu d\nu \quad \dots \quad (8),$$

wo

$$\frac{c_i}{c_0} = \sigma_j$$

die relative Steifigkeit und κ_{ik} die Einfluß-Koordinationszahl sind.

Die Bezeichnung der Steifigkeiten $\sigma_\xi \dots$ ist eng mit der Bestimmung der entsprechenden Koeffizienten der Anisotonie verbunden, wobei

$$\omega_{ikj} = \Omega_{ikj} \cdot P_j \quad \dots \quad (9),$$

mit Ω_{ikj} als Einflußzahl der anisotonischen Belastung.

Im allgemeinen ist

$$\omega_{ik} \neq \sum_{j=1}^n \omega_{ikj},$$

weil das Superpositionsprinzip keine Anwendung dabei findet. Es ist doch von Ω_{ikj} und von der Reihenfolge der einzelnen Belastungen abhängig.

Endlich bestimmen wir (mittels der bekannten Regel von Leibniz) die bei der Lösung oft gebrauchte Ableitung

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{(H-E) \int_0^t [\dot{\omega}(t, \tau) \cdot K(t, \tau) + \omega(t, \tau) \cdot \dot{K}(t, \tau)] d\tau}{n \left[1 + \frac{H-E}{H n} \int_0^t \omega(t, \tau) \cdot K(t, \tau) d\tau \right]^2} \quad \dots \quad (10)$$

Literatur

- [1] J. ZAWADZKI, Beitrag zur Deformationshypothese der sphärischen Polymeren, ZAMM 38 (1958), S. 337—343.
- [2] J. ZAWADZKI, Die Analyse des Dehnungszustandes der Polymeren mittels der „Ablösung“ der inneren Bindungen, ZAMM 39 (1959), S. 426—427.
- [3] J. ZAWADZKI, Stress Field and Structural Non-Homogeneity of Spherical Polymers, Bulletin de L'Academie Polonaise des Sciences, Vol. VII Nr. 2—3 (1959).

Anschrift: Doz. Dr.-Ing. J. ZAWADZKI, Wrocław 2, Kurkowa 29/6 (Polen)

E. ELASTIZITÄTSLEHRE

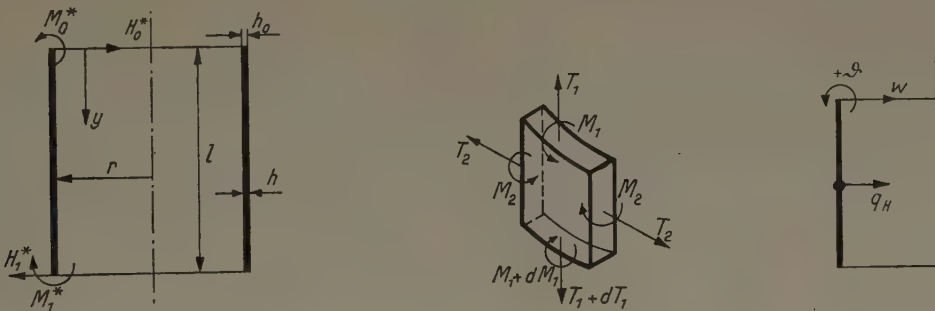
Zur Theorie der drehsymmetrisch belasteten Kreiszyinderschalen beliebiger Wandstärke

Von N. GORBATOV und J. VALENTA*)

Die klassische Lösung dünnwandiger Kreiszyinderschalen von veränderlicher Dicke beruht, wie bekannt, auf dem Suchen nach einer genauen Lösung des Systems von Differentialgleichungen (REISSNER, FEDERHOFER, HORWAY, NEVIN DE SILVA, FAVRE, CONWAY, ORAVAS). Bei den komplizierteren Meridian- bzw. Dickenformen der Schale kann man diese Lösungen nur unter gewissen vereinfachenden Voraussetzungen erzielen.

Zur genauen Lösung der grundlegenden Schalengleichungen kann man auch mit der Methode schrittweiser Näherungen gelangen, da die Funktionen, die in diesen Gleichungen vorkommen, die LIPSCHITZ-PICARDSchen und die anderen erforderlichen Bedingungen erfüllen. Deswegen konvergieren die schrittweisen Näherungen in einem bestimmten Bereich zur genauen Lösung.

Mit Bezug auf das rasche Abklingen von Randwirkungen kann man mit Vorteil als Ausgangsfunktionen eine den unendlich starren Meridianen zugehörige Lösung wählen. Weitere Näherungen drücken dann die Verschiebung bzw. die Teildrehung der Elemente der Zylindermantellinie in bezug auf die vorangehende Gleichgewichtslage aus.



Setzen wir die Lösung eines gegebenen Problems in der Form

$$w = \bar{w}_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j, \quad \text{bzw.} \quad \vartheta = \bar{\vartheta}_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \chi_j \quad \dots \dots \dots (1)$$

voraus, wo $\bar{w}_0, \bar{\vartheta}_0$ die für einen starren Meridian gültigen Ausgangsapproximationen und ω_j, χ_j die Korrekturen zur $(j-1)$ -ten Approximation sind. Bezeichnen wir außerdem mit $w_{(0)}(0), \vartheta_{(0)}(0)$ die Verschiebung bzw. die Teildrehung des starren Meridians im anfänglichen Punkt $\eta = \frac{y}{l} = 0$ der Zylindermantellinie (Bild); die radiale Verschiebung w im beliebigen Punkt wird dann folgenderweise ausgedrückt:

$$\bar{w}_0 = w_{(0)}(0) + l \cdot \vartheta_{(0)}(0) \cdot \eta - (1 + \nu) l^2 \int_0^{\eta} d\eta \int_0^{\eta} t(\eta) d\eta \quad \dots \dots \dots (2),$$

wo die ersten zwei Glieder die Verschiebung und die Teildrehung der Zylindermantellinie als eines Ganzen ausdrücken, indem das letzte Glied die durch den Temperaturgradienten bewirkte Meridiandurchbiegung ausdrückt. Die Funktion $t(\eta)$ gibt den Verlauf des Temperaturgradienten längs der Zylindermantellinie an. Mit der Zylinderdicke ändert sich die Temperatur linear. Die Ausgangsapproximation der Schubkraft $H_{(0)}$ und des Moments $M_{1(0)}$ werden aus den Gleichgewichtsgleichungen bestimmt. Durch Integration der Gleichgewichtsgleichungen und der

*) Staatliches Forschungsinstitut für Wärmetechnik, Prag.

Deformationsverhältnisse werden weitere Näherungen bestimmt. Nach der n -ten Näherung bekommt man z. B. ($r = \text{konst.}$):

$$\eta = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_{(n)}(0) &= \frac{1}{E_0 h_0 \lambda^2} \left\{ \sum_{s=0}^1 (\beta_s^{(1)} H_s^* + \varphi_s^{(1)} M_s^*) + \frac{E_0 h_0 \lambda}{A^{(1,2)}} \sum_{s=0}^2 a_s A^{(1,s+3)} \right\} + \frac{l}{D_0 A^{(1,2)}} \sum_{j=1}^n B^{(1,j-1)}, \\ w_{(n)}(0) &= -\frac{r}{E_0 h_0 \lambda} \left\{ \sum_{s=0}^1 (\beta_s^{(2)} H_s^* + \varphi_s^{(2)} M_s^*) + \frac{E_0 h_0 \lambda}{A^{(1,2)}} \sum_{s=0}^2 a_s A^{(2,s+3)} \right\} - \frac{l^2}{D_0 A^{(1,2)}} \sum_{j=1}^n B^{(2,j-1)} \end{aligned} \right\} \quad (3).$$

$$\eta = 1$$

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_{(n)}(1) &= \vartheta_{(n)}(0) - \frac{l}{D_0} \tilde{J}_1^{(n-1)}(1) - (1 + \nu) l F'(1), \quad n = 1, 2, \dots \\ w_{(n)}(1) &= w_{(n)}(0) + l \cdot \vartheta_{(n)}(0) - \frac{l^2}{D_0} \tilde{J}_2^{(n-1)}(1) - (1 + \nu) l^2 F(1) \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots (4).$$

Einheitsschubkraft und das Moment:

$$\begin{aligned} H_{(n)} &= H_0^* - E_0 h_0 \lambda \left\{ \frac{w_{(0)}(0)}{r} J_1^{(1)}(\eta) + \lambda \vartheta_{(0)}(0) \cdot J_1^{(2)}(\eta) + \alpha_0 J_1^{(3)}(\eta) - (1 + \nu) \lambda l J_1^{(4)}(\eta) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda r}{E_0 h_0 \lambda} J_1^{(5)}(\eta) - \frac{\lambda l}{D_0 A^{(1,2)}} \sum_{j=1}^n [J_1^{(1)}(\eta) B^{(2,j-1)} - \lambda J_1^{(2)}(\eta) B^{(1,j-1)} - A^{(1,2)} \tilde{J}_1^{(j-1)}(\eta)] \right\} \quad (5), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{1(n)} &= M_0^* - l H_0^* \cdot \eta + E_0 h_0 \lambda l \left\{ \frac{w_{(0)}(0)}{r} J_2^{(1)}(\eta) + \lambda \vartheta_{(0)}(0) J_2^{(2)}(\eta) \right. \\ &\quad \left. + \alpha_0 J_2^{(3)}(\eta) - (1 + \nu) \lambda l J_2^{(4)}(\eta) - \frac{r}{E_0 h_0} J_2^{(5)}(\eta) - \frac{\lambda l}{D_0 A^{(1,2)}} \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{j=1}^n [J_1^{(1)}(\eta) B^{(2,j-1)} - \lambda J_1^{(2)}(\eta) B^{(1,j-1)} + A^{(1,2)} \tilde{J}_2^{(j-1)}(\eta)] \right\} \quad \dots \dots (6). \end{aligned}$$

Die Einflußgrößen β und φ drücken in erster Näherung die durch die Einheitskraft und das Moment bewirkte Verschiebung bzw. Teildrehung des Randes der Zylinderschale aus.

$$\begin{aligned} \beta_0^{(k)} &= \frac{J_1^{(k)}(1) - J_2^{(k)}(1)}{A^{(1,2)}}, & \beta_1^{(k)} &= \frac{J_2^{(k)}(1)}{A^{(1,2)}}, \\ \varphi_0^{(k)} &= -\varphi_1^{(k)} = \frac{J_1^{(k)}(1)}{l A^{(1,2)}} & (k = 1, 2). \end{aligned}$$

Die Integrale einzelner Funktionen werden mit dem Buchstaben J bezeichnet, wo der untere Index der Zahl der regelmäßigen Integrationen entspricht. Die Bedeutung einzelner Integrale ist wie folgt:

$$\begin{aligned} A^{(k,i)} &= J_1^{(k)}(1) \cdot J_2^{(i)}(1) - J_2^{(k)}(1) J_1^{(i)}(1), & (i = 1, 2, \dots, 5) \\ B^{(k,j-1)} &= J_1^{(k)}(1) \tilde{J}_2^{(j-1)}(1) - J_2^{(k)}(1) \tilde{J}_1^{(j-1)}(1), & (j = 1, 2, \dots) \\ J_1^{(1)}(\eta) &= \int_0^\eta E^*(\eta) \delta(\eta) d\eta, & J_1^{(4)}(\eta) &= \int_0^\eta E^*(\eta) \delta(\eta) F(\eta) d\eta \\ J_1^{(2)}(\eta) &= \int_0^\eta E^*(\eta) \delta(\eta) \cdot \eta d\eta, & J_1^{(5)}(\eta) &= \int_0^\eta q_H(\eta) d\eta. \\ J_1^{(3)}(\eta) &= \int_0^\eta E^*(\eta) \delta(\eta) \alpha^*(\eta) T(\eta) d\eta, \end{aligned}$$

Die Funktion $T(\eta)$ gibt den Temperaturverlauf der Mittelfläche wieder.

$$\begin{aligned} \tilde{J}_1^{(j-1)}(\eta) &= \int_0^\eta \frac{1}{E^*(\eta) \delta^3(\eta)} M_{1(j-1)} d\eta, \\ \tilde{J}_1^{(j-1)} &= \int_0^\eta E^*(\eta) \delta(\eta) J_2^{(j-1)}(\eta) d\eta. \end{aligned}$$

Ferner gelten:

$$F(\eta) = \int_0^\eta d\eta \int_0^\eta \alpha^* t(\eta) \cdot d\eta,$$

$$E^*(\eta) = \frac{E(\eta)}{E_0}, \quad \alpha^*(\eta) = \frac{\alpha(\eta)}{\alpha_0}, \quad \delta(\eta) = \frac{h(\eta)}{h_0},$$

$$\eta = \frac{y}{l}, \quad \lambda = \frac{l}{r}, \quad a_0 = -\alpha_0, \quad a_1 = (1 + \nu) \alpha_0 \lambda l, \quad a_2 = \frac{r}{E_0 h_0},$$

$$D_0 = \frac{E_0 h_0^3}{12(1 - \nu^2)},$$

E_0, h_0 sind gleich dem Wert des Elastizitätsmoduls und der Wärmedehnzahl im Anfang $\eta = 0$.

Die Konvergenz der schrittweisen Näherungen ist etwa ebenso schnell wie die Konvergenz der Potenzreihe für die Exponentialfunktion und hängt von der Länge und Dicke der Schale ab. Für die Zylinderschalen mit der Länge $l < \sqrt{r h}$ genügt es bei einer in der technischen Praxis üblichen Genauigkeit, nur die erste bzw. die zweite Näherung zu berücksichtigen.

Anschriften: Dr. N. GOBBATOV, } Staatliches Forschungsinstitut für Wärmetechnik, Praha I, Husova 8
Ing. J. VALENTA, }

Einige Bemerkungen zur Beschreibung mechanischer Vorgänge in einem Kontinuum

Von TH. LEHMANN

Mechanische Vorgänge lassen sich den Raumpunkten (EULERSche Betrachtungsweise) oder den Körperpunkten (LAGRANGESche Betrachtungsweise) zuordnen; sie lassen sich auf raumfeste oder körperfeste Koordinatensysteme beziehen. Die sich daraus ergebenden Unterschiede sind besonders bei der zeitlichen Verfolgung mechanischer Vorgänge (Differentiationen nach der Zeit und Integrationen über die Zeit) zu beachten. Eine ausführliche Darstellung der hiermit zusammenhängenden Fragen erscheint in Kürze im Ingenieur-Archiv.

Anschrift: Doz. Dr.-Ing. TH. LEHMANN, Hannover, Podbielskistr. 93

Greensche Funktionen für dünne Kreisplatten

Von KH. NASITTA

Es werde die Mittelebene einer dünnen Kreisingplatte durch die Polarkoordinaten r, φ beschrieben. Die Polarkoordinaten ϱ, ψ bestimmen den Punkt, in dem die Platte durch eine Einzellast $P = 1$ belastet wird. Am Innenrand $r = a$ bzw. Außenrand $r = b$ der Platte bestehen irgendwelche Randbedingungen der elementaren Plattentheorie.

Die Durchbiegungen der Platte $w(r, \varphi)$ und damit auch alle Schnittgrößen sind durch die GREENSche Funktion des Problems gegeben

$$w(r, \varphi) \equiv G(r, \varphi; \varrho, \psi) \quad \dots \dots \dots (1).$$

Im Sinne der KIRCHHOFFSchen Plattentheorie muß $G(r, \varphi; \varrho, \psi)$ eine außer in $(r, \varphi) = (\varrho, \psi)$ biharmonische Funktion sein, die den Randbedingungen der Auflagerung genügt. Es muß also gelten

$$\Delta \Delta G = 0 \quad \text{außer in } (r, \varphi) = (\varrho, \psi) \quad \dots \dots \dots (2).$$

Überdies muß die durch G gegebene Funktion für die Durchbiegung der Platte glatt im ganzen Plattenbereich, d. h. dort stetig differenzierbar nach r und φ sein und eine gerade Funktion um $\varphi = \psi$ von der Periode 2π . Daraus folgt, daß sich $G(r, \varphi; \varrho, \psi)$ durch eine gleichmäßig und absolut konvergente FOURIERreihe darstellen läßt. Bezeichnet man die FOURIERkoeffizienten mit $\theta_m(r; \varrho)$, so gilt:

$$G(r, \varphi; \varrho, \psi) = \sum_{m=0}^{\infty} \theta_m(r; \varrho) \cos m(\varphi - \psi) \quad \dots \dots \dots (3).$$

Bekanntlich setzt sich die GREENSCHE Funktion aus einem singulären Anteil G_s und einem im ganzen Plattenbereich regulären Anteil G_0 zusammen, so daß man schreiben kann

$$G = G_s + G_0 \quad \dots \quad (4).$$

Wenn die FOURIERKoeffizienten von G_s mit $T_m(r; \varrho)$ und jene von G_0 mit $\Omega_m(r; \varrho)$ bezeichnet werden, so wird

$$G_s(r, \varphi; \varrho, \psi) = \sum_{m=0}^{\infty} T_m(r; \varrho) \cos m(\varphi - \psi) \quad \dots \quad (5)$$

und

$$G_0(r, \varphi; \varrho, \psi) = \sum_{m=0}^{\infty} \Omega_m(r; \varrho) \cos m(\varphi - \psi) \quad \dots \quad (6),$$

wobei wegen (4) mit (3) gilt

$$\theta_m(r; \varrho) = T_m(r; \varrho) + \Omega_m(r; \varrho) \quad \dots \quad (7).$$

Beachtet man, daß (2) für G_0 nach (6) im ganzen Plattenbereich gilt, so folgt mit vorerst noch beliebigen Konstanten $X_{mi}(\varrho)$ ($i = 1, 2, 3, 4; m = 0, 1, 2, \dots$)

$$\Omega_0(r; \varrho) = X_{01}(\varrho) + X_{02}(\varrho) \ln \frac{r}{b} + X_{03}(\varrho) r^2 + X_{04}(\varrho) r^2 \ln \frac{r}{b} \quad \dots \quad (8),$$

$$\Omega_1(r; \varrho) = X_{11}(\varrho) r + X_{12}(\varrho) r^{-1} + X_{13}(\varrho) r^3 + X_{14}(\varrho) r \ln \frac{r}{b} \quad \dots \quad (9),$$

und für $n \geq 2$

$$\Omega_n(r; \varrho) = X_{n1}(\varrho) r^n + X_{n2}(\varrho) r^{-n} + X_{n3}(\varrho) r^{n+2} + X_{n4}(\varrho) r^{-n+2} \quad \dots \quad (10).$$

Aus den jeweils 2 Randbedingungen für G am Innen- und am Außenrand folgen nun für die X_{mi} für jedes m vier lineare Gleichungen, aus denen die $X_{mi}(\varrho)$ ermittelt werden können. Dazu müssen die $T_m(r, \varrho)$ nach (5), aus denen sich die rechten Seiten dieser vier linearen Gleichungen ergeben, bekannt sein.

Für diesen singulären Anteil der Lösungen kann die für den Fall der Vollplatte schon von E. REISSNER benutzte Funktion verwendet werden. Damit wird

$$G_s(r, \varphi; \varrho, \psi) = \frac{1}{16 \pi K} [r^2 + \varrho^2 - 2 r \varrho \cos(\varphi - \psi)] \ln \frac{b^2 [r^2 + \varrho^2 - 2 r \varrho \cos(\varphi - \psi)]}{b^4 + r^2 \varrho^2 - 2 b^2 r \varrho \cos(\varphi - \psi)} \quad (11),$$

wobei K die Plattensteifigkeit bedeutet. Unter Beachtung der Orthogonalitätsrelationen für die trigonometrischen Funktionen ergibt sich damit aus (5)

$$T_0(r; \varrho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi G_s(r, \varphi; \varrho, \psi) \quad \dots \quad (12)$$

und für $n \geq 1$

$$T_n(r; \varrho) \cdot \cos n \varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\psi G_s(r, \varphi; \varrho, \psi) \cdot \cos n \psi \quad \dots \quad (13).$$

Eine für jede Auflagerung und Laststellung explizite Darstellung der GREENSCHEN Funktion gemäß (3) ist nur möglich, wenn es gelingt, die Integrale (12) und (13) aufzulösen.

Dazu konstruiert man sich eine Schar von Lösungen $w_n(r, \varphi)$ für folgendes spezielle Plattenproblem: Eine ungelochte Platte, die bei $r = b$ frei aufgelagert ist, sei innerhalb eines Radius $r = \varrho$ belastet durch

$$p_n(\varphi) = K (16 - n^2) (4 - n^2) \cos n \varphi = K \Delta \Delta w_n(r, \varphi) \quad \dots \quad (14).$$

Dann werden die $w_n(r, \varphi)$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) durch den Ansatz

$$w_n(r, \varphi) = \begin{cases} \lambda_n(r) \cdot \cos n \varphi & \text{für } 0 \leq r \leq \varrho \\ R_n(r) \cdot \cos n \varphi & \text{für } \varrho \leq r \leq b \end{cases} \quad \dots \quad (15)$$

gegeben, wobei

$$\lambda_n(r) = r^4 + c_{n1} r^n + c_{n3} r^{n+2} \quad \dots \quad (16)$$

ist und die $R_n(r)$ für entsprechendes n ebenso wie (8), (9), (10) aufgebaut sind, da $w_n(r, \varphi)$ außerhalb des Lastbereiches eine biharmonische Funktion sein muß. Die für jedes n in λ_n vorhandenen zwei und in R_n verfügbaren vier freien Konstanten können einfach aus den beiden Randbedingungen bei $r = b$ und den vier Übergangsbedingungen bei $r = \varrho$ ermittelt werden.

Die spezielle GREENSche Funktion für die außen frei aufgelagerte ungelochte Kreisplatte ist nach E. REISSNER bekannt und sei mit $\bar{G}(r, \varphi; \xi, \psi)$ bezeichnet, wobei (ξ, ψ) die Polarkoordinaten des Punktes sind, in dem die Einzellast $P = 1$ angreift. \bar{G} gestattet wieder die Darstellung (4), wobei \bar{G}_s gemäß (11) gewählt werden kann, so daß gilt

$$\bar{G} = G_s + \bar{G}_0 (17),$$

und \bar{G}_0 in Form einer einfachen FOURIERreihe vorliegt. Wegen der Entwicklungsformel für die GREENSche Funktion, läßt sich die Lösung $w_n(r, \varphi)$ auch durch Integration der mit $p_n(\varphi)$ nach (14) bewichteten GREENSchen Funktion \bar{G} darstellen. Mit (14) gilt

$$w_n(r, \varphi) = K(16 - n^2) (4 - n^2) \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\psi \int_{\xi=0}^{\varrho} \xi d\xi \bar{G}(r, \varphi; \xi, \psi) \cos n\psi \dots \dots (18).$$

In (18) sind alle Funktionen bekannt und man kann über den regulären Teil \bar{G}_0 von \bar{G} einfach integrieren, wenn man die Orthogonalitätsrelationen der trigonometrischen Funktionen beachtet. Bezeichnet man nun mit

$$f_n(r; \varrho) \cos n \varphi \equiv w_n(r, \varphi) = K(16 - n^2) (4 - n^2) \int_{\psi=0}^{2\pi} d\psi \int_{\xi=0}^{\xi} d\xi \bar{G}_0(r, \varphi; \xi, \psi) \cos n \psi \quad (19),$$

so gilt wegen (18)

$$f_n(r; \varrho) \cdot \cos n \varphi = K(16 - n^2) (4 - n^2) \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\psi \int_{\xi=0}^{\varrho} d\xi G_s(r, \varphi; \xi, \psi) \cos n \psi \quad . \quad (20),$$

wobei sich die $f_n(r; \varrho)$ als Funktionen ergeben, die für entsprechendes n gemäß (8), (9) oder (10) aufgebaut und deren Konstante sehr einfache Ausdrücke in ϱ sind.

Da G_s in (20) stetig von ξ abhängt, kann man (20) nach ϱ differenzieren und erhält für $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\frac{\cos n \varphi}{\varrho K(16 - n^2)(4 - n^2)} \frac{\partial f_n}{\partial \varrho} \equiv F_n(r; \varrho) \cos n \varphi = \int_{\psi=0}^{2\pi} d\psi G_n(r, \varphi; \varrho, \psi) \cos n \psi \quad (21).$$

Vergleicht man nun (21) mit (12) bzw. (13), so gilt

$$T_0(r; \varrho) = \frac{1}{2\pi} F_0(r; \varrho) \quad (22),$$

$$T_n(r; \varrho) = \frac{1}{\pi} F_n(r; \varrho) \quad \text{für } n \geq 1 \quad \dots \dots \dots (23).$$

Damit sind die FOURIERkomponenten des singulären Teiles G_s der GREENschen Funktion gegeben, denn $F_m(r; \varrho)$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) sind bekannte Funktionen.¹⁾ Durch geeignete Wahl der $X_{mi}(\varrho)$ in (8), (9) und (10) kann dann die GREENsche Funktion nach immer dem gleichen, einfachen Formalismus den speziellen Randbedingungen angepaßt werden.

Anschrift: Privat-Doz. Dr.-Ing. KH. NASITTA, Berlin-Schmargendorf, Krampasplatz 2

¹⁾ Diese Ergebnisse hat der Verfasser in der Arbeit „Die dünne, freiaufgelagerte Kreisringplatte mit Einzellast“, die in der ZAMM erscheinen wird, zusammengestellt.

Eigenspannungen und magnetisches Verhalten

Von GEORG RIEDER

Die phänomenologische Beschreibung der Vorgänge in ferromagnetischem Material erfordert neben der Potentialtheorie des Magnetfeldes und der Elastizitätstheorie noch eine weitere Kontinuumstheorie des magnetischen Zustandes, für die BROWN [1] den Namen „Mikromagnetik“ vorgeschlagen hat. Das mikromagnetische Kontinuum entsteht, ähnlich wie das elastische Kontinuum aus dem Kristallgitter, durch Grenzübergang aus einem Aggregat magnetischer, mit den Elektronenspins gekoppelter Elementarmomente, und es gibt die Gesetze der Drehung des Magnetisierungsvektors wieder, dessen Betrag im homogenen Ferromagnetikum überall konstant ist. Bei einem Vergleich mit dem Kontinuum der Elastizitätstheorie hat man an die Stelle der Verschiebung im mikromagnetischen Kontinuum die Drehung des Magnetisierungsvektors zu

setzen, und an die Stelle der Dehnungen die Richtungsableitungen der Drehwinkel bzw. Richtungs cosinus. Den Elastizitätskonstanten entspricht im Magnetisierungskontinuum eine „Austauschsteifigkeit“ (die Konstante C in [1]), welche den Einfluß der quantenmechanischen, auf parallele Ausrichtung benachbarter Elektronenspins hinwirkenden Austauschkopplung in ähnlicher Weise makroskopisch zu einer Drehmomentenspannung zusammenfaßt wie das Hooke'sche Gesetz die Kräfte zwischen den einzelnen Gitteratomen zur elastischen Spannung. An die Stelle der Masse tritt schließlich in der Kinetik des Magnetisierungskontinuums die Drallvektordichte der Elektronenspins [1].

Besonders deutlich treten die Parallelen zur Elastizitätstheorie in den dreidimensionalen Stabilitätsproblemen zutage, wie sie neuerdings in der Theorie der Pulver-Dauermagnete untersucht wurden [1]. Sie entsprechen weitgehend den Knick- und Beulproblemen der Elastomechanik. Auf die eindimensionale, in den Drehungen nicht-lineare Mikromagnetik gründet sich die Theorie der BLOCH'schen Wände, die zuerst von LANDAU und LIFSHITZ 1935 kontinuumsmäßig formuliert und seither von zahlreichen Autoren weiter ausgebaut wurde [1], [2]. Eine ausführliche Darstellung mit zahlreichen neuen Einzelergebnissen und Formeln hat LILIEY [3] gegeben. Nach dieser durch direkten Nachweis experimentell gut bestätigten Theorie liegt im normalen, weich-

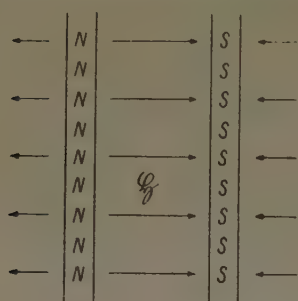


Bild 1. Einfachbelegungen
a) mit freien magnetischen Ladungen
b) mit Versetzungen (nach RIEDER [5])

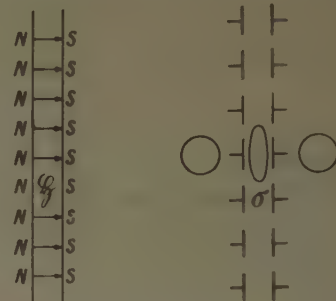


Bild 2. Doppelbelegungen
a) mit freien magnetischen Ladungen,
b) mit Versetzungen (nach RIEDER [5])

magnetischen Material der Magnetisierungsvektor nur in wenigen, bevorzugten kristallographischen Richtungen, und der Wechsel von der einen zur anderen Richtung erfolgt nur in relativ dünnen, wandartigen Übergangszonen [2]. Da die pauschale Magnetisierungsänderung in schwachen Magnetfeldern praktisch ausschließlich über „Wandverschiebungen“ erfolgt, ist die Theorie der BLOCH'schen Wände und ihrer Bewegungshindernisse grundlegend für ein Verständnis des magnetischen Verhaltens.

Die Bestimmung der Struktur einer BLOCH'schen Wand wird allgemein als ein Variationsproblem formuliert; die Summe aus der „wanderweiternden“ Austauschenergie und der „wandverengenden“ Richtungsenergie im Kristall (kurz: „Kristallenergie“) wird zum Minimum gemacht. Wegen der mit jeder Änderung der Magnetisierungsrichtung normalerweise verbundenen spontanen Gitterverzerrung („magnetostriktive Extradehnung“) kommt dazu noch die Energie der magnetostriktiven Eigenspannungen, für die der Verfasser [4] allgemeine, auch für die von anderen Autoren [3] nicht immer völlig korrekt behandelten unsymmetrischen Wandlagen gültige Formeln angegeben hat. Besonders wichtig werden diese magnetostriktiven Eigenspannungen aber dadurch, daß sie die Möglichkeit einer Wechselwirkung mit anderen Eigenspannungsquellen schaffen, insbesondere mit den Versetzungen [5].

Eine für viele Zwecke ausreichende Annäherung des Spannungsfeldes BLOCH'scher Wände gewinnt man aus einer Darstellung durch Flächenbelegungen mit „Quasi-Versetzungen“ [6], [5], wobei man zwei Gruppen von Wänden zu unterscheiden hat. Wände der ersten Gruppe entsprechen einer Einfach-Belegung (Bild 1), und das Spannungsfeld erstreckt sich über das ganze Zwischengebiet (die sog. WEISS'schen Bezirke). Die zweite Gruppe entspricht einer Doppelbelegung, wobei sich das Spannungsfeld auf die BLOCH'schen Wände selbst beschränkt (Bild 2). In beiden Bildern ist noch zum Vergleich ein analoges Beispiel aus der Potentialtheorie skizziert. Diese Eigenspannungsquellen vermögen bei einer Wandverschiebung mit der BLOCH'schen Wand im elastischen Medium zu wandern, ähnlich wie dies von den Versetzungen in der Theorie der Kristallplastizität bekannt ist [6], [12].

Der Begriff der „Kraft“ auf Eigenspannungsquellen wurde von ESHELBY [7] aus der mechanischen Gesamtenergie als Funktion des Ortes der Eigenspannungsquelle abgeleitet. Da hier nur reine Eigenspannungen im unendlichen homogenen Medium vorkommen, darf man zur Be-

rechnung die einfache Formel von PEACH und KOEHLER anwenden [8]. Für die Kraft der Versetzung auf die BLOCHSche Wand erhält man je cm Versetzungslänge (Vorzeichenumkehr wegen „actio“ gleich „reactio“)

$$\vec{p} = -\mathbf{t} \times \sigma^{GM} \cdot \mathbf{b} \quad (1)$$

wo \mathbf{t} der Einheitsvektor der Versetzungsrichtung, \mathbf{b} der BURGERSVEKTOR¹⁾ und σ^{GM} die magnetostriktive Gesamtspannung in der BLOCHSchen Wand ist. In einem Koordinatensystem mit der Wandnormalen als z-Achse folgt daraus für die allein wesentliche z-Komponente

$$p_z = t_y b_x \sigma_{xx}^{GM} - t_x b_y \sigma_{yy}^{GM} + (t_y b_y - t_x b_x) \sigma_{xy}^{GM} \dots \dots \dots (2).$$

Vernachlässigt man also die durch das Spannungsfeld der Versetzung bedingte Störung in der Struktur der BLOCHSchen Wand, so ist diese Kraft je Versetzungslänge nach den a. a. O. [4] angegebenen Formeln elementar berechenbar. Für die Gesamtkraft einer schräg durchstoßenden, geraden Versetzung auf eine Wand der zweiten Gruppe.

$$P_s = \frac{1}{t_z} \{t_y b_x \Sigma_{xx} - t_x b_y \Sigma_{yy} + (t_y b_y - t_x b_x) \Sigma_{xy}\} \quad \dots \dots \dots (3)$$

mit der Abkürzung

$$\Sigma_a = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_a^{GM}(z) dz$$

ist diese Störung überdies auch bei strenger Rechnung ohne Bedeutung, denn sie läuft bei der Wandverschiebung unverändert mit. Für ein Versetzungsstück parallel zur Wandebene hat man (2) mit der Länge zu multiplizieren, während für leicht geneigte, in der Wand endende oder für stark gekrümmte Versetzungsstücke eine Berechnung der Gesamtkraft auch in der elementaren Näherung i. allg. wohl nur numerisch möglich ist.

Der Übergang zu den pauschalen Kenngrößen der technischen Magnetisierungskurve wird nun dadurch erschwert, daß weder die Anordnung der BLOCHschen Wände noch die ihrer Hindernisse in allen Einzelheiten bekannt ist; in den meisten Fällen wird man jedoch eine mehr oder weniger regellose Verteilung der Hindernisse annehmen müssen. Soweit dem Verfasser bekannt ist, haben die damit zusammenhängenden geometrisch-statistischen Probleme bisher keine zugleich strenge und allgemeingültige Lösung gefunden; es existieren jedoch für die Koerzitivkraft Abschätzungsformeln unter einschränkenden Voraussetzungen, von denen die ursprünglich für Versetzungen parallel zur Wandebene entwickelte Formel von VICENA [9] dem vorliegenden Problem am besten entspricht. Liegt das Magnetfeld für einen speziellen Wandtyp in der günstigsten Richtung, nämlich in der zweiten Winkelhalbierenden der beiderseitigen Magnetisierungsrichtungen [10], so ist die Koerzitivkraft nach VICENA

$$H_c = \frac{1}{2 J_s L |\sin \theta \cos \Phi_0|} \sqrt{2 f(p) \int_{(k)} dN(k) \int_{z_0 - \frac{1}{2}(d+\delta)}^{z_0 + \frac{1}{2}(d+\delta)} P_k^2(z - z_0) dz} \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

wobei für große p $f(p)/\ln p$ gegen Eins strebt und für $p = 1$ $f(p)$ einen Wert der Größenordnung Eins annimmt. p ist dabei etwa gleich der Zahl der unabhängigen Hindernisse, die auf der Kantenlänge L der vereinfachten, als würfelförmig angenommenen WEISSschen Bezirke Platz finden würden²⁾. Weiter ist J_s die Sättigungsmagnetisierung, $dN(k)$ die räumliche Dichte der durch die Parametermannigfaltigkeit $k \dots k + dk$ gekennzeichneten Hindernisse, $P_k(z - z_0)$ die Kraft eines Hindernisses an der Stelle z_0 auf eine Blochsche Wand an der Stelle z , $d(k) + \delta$ die Summe aus der z -Erstreckung eines Hindernisses und der Wanddicke und schließlich θ und Φ_0 die Richtungswinkel der Magnetisierung in den angrenzenden WEISSschen Bezirken.

Bei einem geraden Versetzungsstück sind für die Parameter k offenbar die Komponenten des Linienvektors und des BURGERSVEKTORS einzusetzen, und für P_k bei Wänden der zweiten Gruppe unter Vernachlässigung der Wanddicke der Ausdruck (3), so lange das Versetzungsstück die Wand durchstößt, sonst Null. Wir berechnen als Beispiel (4) für die $\{001\}$, $109,5^\circ$ -Wand [3], [4] in Nickel in Wechselwirkung mit gleichmäßig auf alle Richtungen verteilten Versetzungsstücken der (mittleren) Länge l_0 konstanten BURGERSVEKTORS in $[\bar{1}10]$ -Richtung in der Gleitebene

¹⁾ Vorzeichenkonvention nach [8].

²⁾ Eine genaue Begriffsbestimmung von p würde aus einer noch näher zu definierenden Autokorrelationsbeziehung folgen. Auch die Länge L erfordert noch eine präzisere Definition, wenn man die Wölbfähigkeit der Bloch'schen Wände [10], [11] berücksichtigen will.

(111) [12] (vgl. Bild 3). Die Parameter k kann man jetzt auf den Winkel ψ zwischen BURGERS- und Linienvektor reduzieren. Führt man außerdem noch den Betrag b des BURGERSvektors ein und die Versetzungsdichte in Ebenen senkrecht zur Gleitebene

$$\tilde{n} = \frac{2 l_0}{\pi} N; \quad N = 2 \pi \frac{dN}{d\psi} \quad \dots \dots \dots (5),$$

so erhält man für das Integral unter der Wurzel in (4)

$$\left. \begin{aligned} \int dN(k) \int P_k^2(z - z_0) dz &= \frac{\tilde{n}}{4} \int_0^{2\pi} d\psi \frac{\Sigma_{xy}^2}{\left| \sqrt{\frac{2}{3}} \sin \psi \right|} \left(\frac{b}{\sqrt{3}} \sin \psi \right)^2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \tilde{n} b^2 \Sigma_{xy}^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6).$$

Das Verschwinden des Integranden für $\psi = 0$ macht in diesem Beispiel die numerische Integration für kleine ψ überflüssig. Einsetzen in (4) ergibt schließlich



Bild 3. Wechselwirkung einer BLOCH'schen Wand mit regellos verteilten Versetzungen in einer einzelnen Gleitebene (nach RIEDER [5])

$$H_c = \frac{b |\Sigma_{xy}| \sqrt{\tilde{n}}}{2 J_s L} \sqrt{\frac{\pi L}{2 l_0}} \quad (7).$$

Da mehrere der darin enthaltenen Größen nicht genau bekannt sind, kann der Absolutbetrag des Ausdrucks (7) nur größenordnungsmäßig bestimmt werden; eine bessere experimentelle Prüfungsmöglichkeit bietet der relative Temperaturverlauf [10], [14], der für Nickel bei tiefen Temperaturen hauptsächlich durch die Spannungsintegrale bestimmt wird. Für das Σ_{xy} dieses speziellen Wandtyps ist er in Bild 4 aufgezeichnet; δ_0 ist dabei eine von LILLEY [3] eingeführte reduzierte Einheit der Wandweite³⁾. Das Ergebnis ist mit den Messungen von DIETRICH und KNELLER [13] gut verträglich; weitere, an der Koerzitivkraft ebenfalls beteiligte Mechanismen werden a. a. O. [5] diskutiert.

Wir sind nun — nach einer Unterscheidung von BROWN [1] — mit diesen Überlegungen durchaus im Rahmen der bekannten Theorie der BLOCH'schen Wände geblieben, welche die Mikromagnetik lediglich dazu benutzt, um Pauschalgrößen wie Wandenergie und

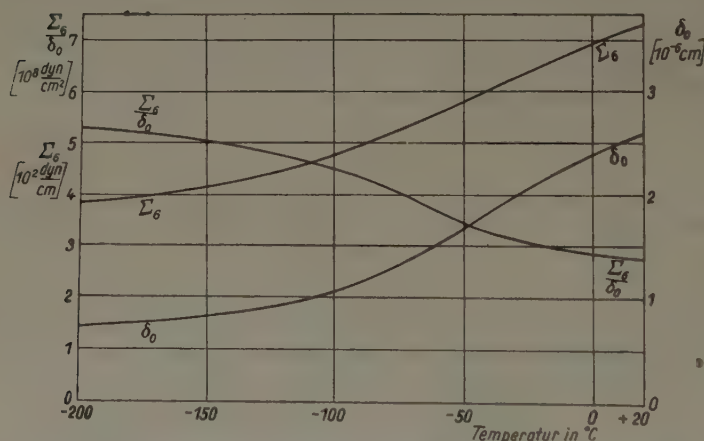


Bild 4. Temperaturabhängigkeit des Spannungsintegrals Σ_{xy} für die $\langle 001 \rangle$, $100,5^\circ$ -Wand in Nickel, eine BLOCH'sche Wand ohne weitreichende Eigenspannungen (nach RIEDER [5]). Σ_{xy} ist in VOIGT'scher Induzierung gleich Σ_6 [4]

³⁾ Die geschlossene Auswertung des Integrals Σ_{xy} gelingt leicht, wenn man zu dem von LILLEY [3] angegebenen Ausdruck für die Kristallenergie dieses Wandtyps die magnetostriktive Eigenspannungsenergie W_{ink}^M nach [4] hinzufügt und unter weitgehender Benutzung der von LILLEY angegebenen Formeln integriert. Man erhält dann in Anlehnung an die Bezeichnungen von LILLEY

$$\frac{1}{\delta_a} \frac{dz}{d\Phi} = \frac{\sin \theta}{\left| \frac{1 + \tau'}{12} \cdot \sin \Phi' \sqrt{1 + q'' \sin \Phi' \cos \Phi' + \sigma' \cos^2 \Phi'} \right|} \quad \dots \dots \dots (8)$$

mit

$$\frac{1 + \tau'}{12} = \frac{2 c_{44} \lambda_{111}^2}{|K_4|}; \quad q'' = 0$$

(Forts. S. T 127)

Wanddicke auszurechnen und aus diesen das Verhalten der BLOCHschen Wände zu bestimmen; nur haben wir als weitere Pauschalgrößen noch die elastischen Spannungsintegrale hinzugefügt. Sicher wird man aber in vielen Fällen auch noch die mikromagnetische Struktur der BLOCHschen Wände berücksichtigen müssen. So leistet z. B. die von KERSTEN und von DIETZE [10] untersuchte Wandwölbung über starren Haftlinien (z. B. Versetzungen) einen wesentlichen Beitrag zur Theorie der Anfangssuszeptibilität; die Verschiebung der Wand über dem Hindernis selbst wird dabei aber bewußt vernachlässigt. Die Berechnung dieser Verschiebung erfordert nun bei Versetzungen oder Versetzungsgruppen eine genaue Kenntnis des Spannungsverlaufs in der BLOCHschen Wand, d. h. also ihrer mikromagnetischen Struktur, besonders wenn auch ihre Störung durch das Spannungsfeld der Versetzung mitberücksichtigt werden soll. Ein einfaches Beispiel dazu soll an anderer Stelle durchgerechnet werden [15].

Einen einigermaßen sicheren Vergleich mit den experimentellen Befunden wird man allerdings in den meisten Fällen kaum erwarten können, wenn man nicht eine Vielzahl möglicher Mechanismen und Modelle zahlenmäßig durchrechnet, was wegen der Anisotropie der Kristalle oft äußerst langwierig ist. Deshalb wird z. Zt. für diese Zwecke in Braunschweig ein Rechenprogramm für die Z 22 entwickelt, welches beim augenblicklichen Stand bereits die Berechnung der Eigenspannungen in BLOCHschen Wänden [4] voll automatisiert.

Literatur

- [1] W. F. BROWN, JR., Micromagnetics, Domains, and Resonance. Journ. Appl. Phys. **30** (1959), S. 62S—69S. — A. AHARONI, Some Recent Developments in Micromagnetics at the Weizmann Institute of Science. Ibid., S. 70S—78S.
- [2] R. BECKER und W. DÖRING, Ferromagnetismus. Berlin 1939. — C. KITTEL, Physical Theory of Ferromagnetic Domains. Rev. Mod. Phys. **21** (1949), S. 541—583. — R. M. BOZORTH, Ferromagnetism. Toronto/New York/London 1951/53.
- [3] B. A. LILLEY, Energies and Widths of Domain Boundaries in Ferromagnetics. Phil. Mag. (7) **41** (1950), S. 792—813.
- [4] G. RIEDER, Eigenspannungen in unendlichen geschichteten und elastisch anisotropen Medien, insbesondere in Weißchen Bezirken und geschichteten Platten. Abh. Braunsch. Wiss. Ges. **11** (1959), S. 20—61. — Zum Einfluß der Magnetostriktion auf Energie und dicke Blochscher Wände. Z. Naturf. **14a** (1959), S. 96—97.
- [5] G. RIEDER, Zur Koerzitivkraft plastisch verformter Nickel-Einkristalle. Berichte der Arbeitsgemeinschaft Ferromagnetismus 1959, im Druck.
- [6] E. KRÖNER, Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1958. Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. Archive Rat. Mech. Anal. **4** (1960), S. 273—343.
- [7] J. D. ESHELBY, The Force on an Elastic Singularity. Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, **244** (1951), S. 87—112. The Continuum Theory of Lattice Defects. Solid State Physics III, S. 79—144. New York 1956.
- [8] G. RIEDER, Mechanische Arbeit bei plastischen Vorgängen. Z. angew. Physik **10** (1958), S. 140—150.
- [9] F. VICENA, По поводу связи коэрцитивной силы ферромагнетиков с внутренним напряжением. (Über den Zusammenhang zwischen der Koerzitivkraft eines Ferromagnetikums und den inneren Spannungen). Czech. Journ. Phys. **4** (1954), S. 419—438. — О влиянии дислокаций на коэрцитивную силу ферромагнетиков. (Über den Einfluß der Versetzungen auf die Koerzitivkraft der Ferromagnetics). Ibid. **5** (1955), S. 480—501.
- [10] M. KERSTEN, Die Wölbung der Blochwand als Elementarvorgang reversibler Magnetisierungsänderungen. Z. angew. Physik **8** (1956), S. 313—322. — Zur Deutung des Temperaturganges der Anfangspermeabilität. Ibid., S. 382—386. — Über die Bedeutung der Versetzungsdichte für die Theorie der Koerzitivkraft rekrystallisierten Werkstoffe. Ibid., S. 496—502. — H.-D. DIETZE, Theorie der Blochwandwölbung mit Streufeld-einfluß. Z. Physik **149** (1957), S. 276—298. — Theorie der Blochwandwölbung mit Streufeld-einfluß für kubische Kristalle mit negativen Kristallanisotropiekonstanten. Techn. Mitt. Krupp **15** (1957), S. 169—177.
- [11] L. NÉEL, Bases d'une nouvelle théorie générale du champ coercitif. Ann. Univ. Grenoble **22** (1947), S. 299—343.
- [12] A. SEEGER, Kristallplastizität. Handbuch der Physik, Bd. VII/2, herausg. von S. Flügge. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1958.
- [13] H. DIETRICH und E. KNELLER, Der Einfluß plastischer Verformung auf die magnetischen Eigenschaften von Nickel-Einkristallen. II. Verfestigungskurve und Temperaturabhängigkeit der Koerzitivkraft. Z. Metallkunde **47** (1956), S. 716—728.
- [14] E. KNELLER, Der Einfluß plastischer Verformung auf die magnetischen Eigenschaften ferromagnetischer Kristalle. Berichte der Arbeitsgemeinschaft Ferromagnetismus 1958. Stuttgart 1959.
- [15] G. RIEDER, Ein Beitrag der Versetzungen zur Anfangssuszeptibilität in weichmagnetischem Material. Z. Naturforschung, im Druck.

Anschrift: Dr. G. RIEDER, Braunschweig, Jasperallee 60

und

$$\sigma' = \frac{\frac{4}{9} |K_4| + (c_{11} - c_{12}) \lambda_{100}^2 - 2 c_{44} \lambda_{111}^2}{2 c_{44} \lambda_{111}^2}.$$

Dann ergibt die hier übergangene, nach dem LILLEYschen Verfahren keineswegs schwierige Rechnung

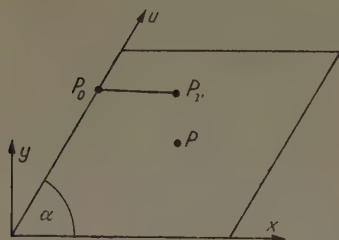
$$\Sigma_{xy} = 2 \sqrt{2} \sqrt{|K_4|} \sqrt{c_{44}} \sin \theta \frac{\operatorname{Ar} \sin \sqrt{\sigma'}}{\sqrt{\sigma'}} \delta_0 \dots \dots \dots (9).$$

Spannungsoptische Untersuchungen schiefwinkliger Platten

Von H. SCHWIEGER und G. HABERLAND

Mit Hilfe des spannungsoptischen Zweischichtenverfahrens können elastische Platten, die innerhalb der KIRCHHOFFSchen Bedingungen auf Biegung beansprucht werden, ähnlich wie Scheiben untersucht werden. Die beiden Schichtmaterialien, aus denen eine Platte zusammengeklebt wird, müssen unterschiedliche spannungsoptische Wirksamkeit besitzen, so daß sich bei einer Durchstrahlung in Richtung der Plattennormalen spannungsoptische Bilder zeigen. Eine derartige Zweischichtenplatte verhält sich hinsichtlich der Verteilung der Bieungs- und Torsionsmomente wie eine homogene Platte. An Stelle der elastischen Konstanten treten mittlere Werte, die sich aus den elastischen Materialgrößen und den Dicken der einzelnen Schichten berechnen lassen.

Die beobachteten relativen Gangunterschiede (Isochromaten) sind ein Maß für die maximalen Torsionsmomente T_{max} , die der Differenz der Hauptbieungsmomente proportional sind. Aus den Isoklinen erhält man die Richtungen der Hauptbieungsmomente. Diese Meßgrößen reichen aus, um durch Integration vom Rande aus die einzelnen Bieungsmomente im Innern der Platte zu bestimmen.



Im vorliegenden Bericht handelt es sich um die Untersuchung schiefwinkliger Platten von der Form eines gleichseitigen Parallelogramms mit zwei gegenüberliegenden freien und zwei frei drehbar aufliegenden Rändern unter der Wirkung einer Einzellast P in Plattenmitte. Der Plattenwinkel α betrug 60° (vgl. Bild).

Zur vollständigen Auswertung wurden zunächst die Torsionsmomente T_{xy} nach der Beziehung

$$T_{xy} = T_{max} \sin 2\varphi \quad \dots \quad (1)$$

(φ bedeutet den Winkel zwischen einer Hauptbieungsmomentenrichtung und der x -Achse) für hinreichend viele Schnitte parallel zur u -Richtung errechnet, aufgetragen und differenziert. Hernach wurden durch Integration die Ersatzmomente m_y über die ganze Platte nach folgender, der Plattenform angepaßten Beziehung ermittelt (vgl. Bild):

$$\left(\frac{m_y}{1 + \mu} \right)_{P_v} = \frac{1}{\sin \alpha} \int_{P_0}^{P_v} \frac{\partial T_{xy}}{\partial u} dx - \{ (T_{xy})_{P_v} - (T_{xy})_{P_0} \} \cotg \alpha + \left(\frac{m_y}{1 + \mu} \right)_{P_0} \quad \dots \quad (2).$$

Darin bedeuten μ den erwähnten Mittelwert der POISSONSchen Konstante und α den Plattenwinkel.

Die Ersatzmomente m_x ergaben sich dann nach folgender Beziehung

$$m_x = m_y \pm 2(1 + \mu) T_{max} \cos 2\varphi \quad \dots \quad (3).$$

Da die Ersatzmomente m_x und m_y definitionsgemäß mit den Bieungsmomenten M_x und M_y in folgendem Zusammenhang stehen

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \frac{1}{1 - \mu^2} (m_x + \mu m_y), \\ M_y &= \frac{1}{1 - \mu^2} (m_y + \mu m_x) \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (4),$$

fließen sich M_x und M_y nunmehr leicht angeben. Alle Momente wurden in Form von Höhenschichtlinien wiedergegeben. Es ist beabsichtigt, eine ausführliche Darstellung der Untersuchungen in dieser Zeitschrift zu veröffentlichen.

Anschriften: Dr. H. SCHWIEGER, Erkner b. Berlin, Gartenstr. 9
Dipl.-Phys. G. HABERLAND, Woltersdorf b. Erkner, Leninstr. 74

Beitrag zur inhomogenen Halbebene

Von G. SONNTAG

Einführung

Es wird die parallel zu ihrer Begrenzung aus einzelnen Schichten zusammengesetzte Halbebene mit einer periodisch verteilten Belastung normal zum Rande untersucht. An diese Aufgabe kann von zwei Seiten herangegangen werden.

a) Man beginnt mit dem Grenzfall einer reibungsfreien Schichtung. Dann treten in Schichtlängsrichtung keine Kräfte, sondern nur Biegespannungen auf und die Schichten sind als Balken zu behandeln, deren Zusammendrückung zu berücksichtigen ist.¹⁾ In Erweiterung dieses Ansatzes kann ein Gleitwiderstand der Schichtflächen eingeführt werden.²⁾ Der Grenzübergang zur homogenen Halbebene ist auf diesem Wege nicht möglich.

b) Der Verband mehrerer Schichten wird als quasihomogen betrachtet, dann entspricht einer elastischen Relativverschiebung der Schichten eine Verminderung des Schubmoduls. Ausgehend von dieser strengen Lösung kann man zu Schichten endlicher Dicke übergehen und aus den Verformungen ihre Biegung abschätzen. Mit abnehmendem Gleitwiderstand der Schichtflächen gewinnt der Biege- und Widerstand der Schichten an Bedeutung. Da die Schichtbiegung in dieser Lösung (quasihomogener Ansatz) nicht enthalten ist, kann kein Grenzübergang zur reibungsfreien Schichtung existieren.

Diese beiden Lösungen treffen sich in der Mitte; sie liefern für den Fall dünner Schichten, aber nicht verschwindendem Gleitwiderstand gleiche Ergebnisse.

Schubspannung proportional der Verschiebung

Lösung b) für die quasihomogene Schichtung, und Vergleich mit der Lösung a), für eine Reibungsschubspannung proportional der Verschiebung

Bild 1 zeigt die Schubverzerrung eines Schichtverbandes. Die Einzelschicht sei isotrop und liefert als Anteil an der Schubverzerrung die Winkeländerung γ_0 . Die Verzerrung der Schichtgruppe wird erhöht um den Winkel $\gamma_u = \Delta u/h$, worin Δu die Relativverschiebung zweier Schichten und h die Schichtdicke bedeutet. Die Relativverschiebung ist proportional der Schubspannung dividiert durch den spezifischen Verschiebungswiderstand R gemäß $\Delta u = \tau_{yz}/R$. Der Gleitwiderstand R wird auf die Flächeneinheit und Relativverschiebung bezogen und hat damit die Dimension kp/cm^3 . Die Schubspannung τ_{yz} , dividiert durch die Verzerrung der Schichtgruppe, liefert ihren Schubmodul gemäß Gl. (1). Wenn man die Verzerrung γ_0 der Einzelschichten gegenüber ihren auf die Schichtdicke bezogenen Relativverschiebungen $\Delta u/h = \gamma_u$ vernachlässigen kann, und in Gl. (1) τ_{yz} und γ_u durch Δu ausdrückt, dann wird der Schubmodul der Schichtgruppe G'_{yz} nur vom spezifischen Gleitwiderstand R und der Einzelschichtdicke h bestimmt

$$G'_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{\gamma_0 + \gamma_u} \approx R h \quad \dots \dots (1).$$

Wenn man die anisotrope Halbebene als quasihomogen betrachtet, dann wird die Verträglichkeitsgleichung³⁾ mit den Moduln $E_y = E_z$ und G'_{yz} ⁴⁾ befriedigt von der Spannungsfunktion

$$F = (c_1 e^{-\lambda_1 y} + c_2 e^{-\lambda_2 y}) \cos\left(\frac{\pi}{a} z\right) \quad \dots \dots (2)$$

mit

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{E_y}{2 G'_{yz}} \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \left(1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{2 G'_{yz}}{E_y}\right)^2}\right) \dots \dots (3).$$

¹⁾ G. SONNTAG, Die in Schichten gleicher Dicke reibungsfrei geschichtete Halbebene mit periodisch verteilter Randbelastung. Forsch. Ing.-Wes. **23** (1957), S. 3–8.

²⁾ G. SONNTAG, Die in Schichten gleicher Dicke geschichtete Halbebene mit periodisch verteilter Randbelastung. Forsch. Ing.-Wes. **26** (1960), im Druck.

³⁾ Vgl. z. B. G. N. SAWIN, Spannungserhöhung am Rande von Löchern (übersetzt von H. NEUBER), Berlin 1956, VEB Verlag Technik, insbes. S. 34.

⁴⁾ Die Richtungszeiger an G' und E sind erforderlich, da die Moduln des Schichtverbandes richtungsabhängig sind.

Um schnell einen prinzipiellen Überblick zu gewinnen, wurde die Querdehnung vernachlässigt. Dann ist im isotropen Fall $2G' = E$ und $\lambda_2 = \lambda_1 = \pi/a$.⁵⁾ Andernfalls existieren zwei additive Lösungen und damit zwei Freiwerte c_1 und c_2 zur Befriedigung der beiden Randbedingungen der Halbebene. Die z -Achse beschreibt den Rand der Halbebene, die durch eine periodisch verteilte Normalbelastung der Amplitude p und Periodenlänge $2a$ belastet ist. Die Spannungen aus dieser Belastung liefert die Spannungsfunktion (2) gemäß $\sigma_y = \partial^2 F / \partial z^2$; $\sigma_z = \partial^2 F / \partial y^2$; $\tau_{yz} = -\partial^2 F / (\partial y \partial z)$, und es folgt nach der Bestimmung der Freiwerte

$$\sigma_y = \frac{p}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_2 e^{-\lambda_2 y} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 y}) \cos\left(\frac{\pi}{a} z\right) \quad (4),$$

$$\sigma_z = \frac{-p}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_1 e^{-\lambda_1 y} - \lambda_2 e^{-\lambda_2 y}) \cos\left(\frac{\pi}{a} z\right) \quad (5),$$

$$\tau_{yz} = \frac{p}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 y} - e^{-\lambda_2 y}) \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi}{a} z\right) \quad (6).$$

Bild 2 zeigt das Abklingen der Spannung σ_y mit dem Randabstand y für verschiedene Werte G'_{yz}/E_y . Für die isotrope Scheibe ohne Querdehnung ($\nu = 0$), ist $G'_{yz}/E_y = 0,5$. Bei Schichten, und einer Berechnung des Schubmoduls nach Gl. (1), ist zu beachten, ob

die Abnahme von G'_{yz} maßgebend von einer Abnahme des Gleitwiderstandes R oder der Schichtdicke h bestimmt wird. Bei Reibungsfreiheit würden nach diesem Ansatz (Schichten ohne Biegesteifigkeit) wegen $\lambda_1 = 0$ die Spannungen nicht abklingen. Obige Lösung ist daher für sehr kleine Werte R unzuverlässig, und es wird die Untersuchung auf dem eingangs beschriebenen Wege a) erforderlich.

Für $G'_{yz}/E_y < 0,15$ vereinfacht sich Gl. (3) zu

$$\lambda_1 = \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{G'_{yz}}{E_y}}; \quad \lambda_2 = \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{E_y}{G'_{yz}}} \quad (7).$$

Mit abnehmendem Schubmodul G'_{yz} wird $\lambda_2 \gg \lambda_1$, und σ_z kann in geringem Abstand vom Rand vernachlässigt werden; ebenso das Glied mit λ_2 im Exponenten von σ_y und von τ_{yz} (diente lediglich dazu, den Rand schubfrei zu machen). Damit werden σ_y und τ_{yz} identisch mit der auf dem Wege a) beschriebenen Lösung²⁾ mit der Abklingzahl

$$\lambda_1 = \frac{\pi}{a} \cdot \frac{\pi h}{\sqrt{3} \cdot 2a} \sqrt{1 + \frac{3}{\pi^2} \left(\frac{2a}{h}\right)^2 \frac{R h}{E}} \quad (8)$$

solange

$$\frac{3}{\pi^2} \left(\frac{2a}{h}\right)^2 \frac{R h}{E} \gg 1$$

Bild 2. Abklingen der bezogenen Druckspannung σ_y/p für verschiedene Werte des Schubmoduls G'_{yz} zum Elastizitätsmodul E_y (wobei $E_y = E_s$).
 p Amplitude der periodischen Randbelastung, a halbe Periodenlänge, y Randabstand. Im Fall einer Schichtung gilt die Darstellung für eine Einzelschichtdicke h und einem spezifischen Verschiebungswiderstand R (je Flächenheit und Längeneinheit der Relativverschiebung) mit $G'_{yz} = R h$ nur, so lange die Ungleichung $(12 a^3 G'_{yz}) / (\pi^3 h^3 E_y) \gg 1$ erfüllt ist

ist. In diesem Fall kann die 1 unter der Wurzel von Gl. (8) vernachlässigt werden und der Ausdruck geht unter Beachtung von Gl. (1) über in λ_1 von Gl. (7). Für einen verschwindenden Gleitwiderstand $R = 0$ wird $G'_{yz} = 0$; dann gilt nicht mehr Gl. (3) oder (7), sondern der Ausdruck vor der Wurzel von Gl. (8) liefert die Lösung für die reibungsfreie Schichtung¹⁾.

Reibungs-Schubspannung proportional dem Druck

Da eine lose Schichtung keine Zugspannungen senkrecht zur Schichtrichtung übertragen kann, ist der periodischen Belastung der Amplitude p_1 ein konstanter Druck $p_0 \geq p_1$ zu überlagern. Für einen Ansatz der Reibungsschubspannung proportional dem örtlichen Druck würde die Lösung

⁵⁾ Für $\lambda_2 = \lambda_1$ werden alle Spannungen 0/0. Die Lösung für den isotropen Sonderfall liefert ein anderer Ansatz; vgl. z. B. K. GIRMANN, Flächentragwerke, 5. Aufl., Wien 1959, Springer Wien.

unnötig kompliziert. Die Schubspannung wechselt nach jeder halben Periode der Belastung die Richtung; die jeweils aus den Schubspannungen gleicher Richtung resultierende Schubkraft wird nur von der gleichmäßigen Vorspannung p_0 und der Reibungszahl μ bestimmt. Da die Vorspannung p_0 in der gesamten Halbebene wirkt, klingt die Reibungs-Schubspannung nicht ab, solange sie unabhängig vom Gleitweg ist. Sie beginnt praktisch abzuklingen, wenn die Relativverschiebungen der Schichtränder so klein werden, daß sich die Schubspannung nicht mehr gemäß der Reibungszahl μ ausbilden kann. Dieser Übergang läßt sich mathematisch schwer erfassen. Es wird daher die Grenze \bar{y} der Gleitzone wie folgt bestimmt. Die Schubspannung vermindert die Biegung der Schichten mit zunehmendem Abstand y vom Rand solange, bis ihre Biegung identisch wird mit der Verformung einer isotropen Halbebene unter der örtlichen Belastung σ_y und τ_{yz} . Von diesem Abstand \bar{y} an verhält sich die geschichtete Halbebene isotrop, d. h. die Relativverschiebung der Schichten hat aufgehört.

Wegen der sehr kleinen Gleitwege ist es zweifelhaft, ob sich die Reibungsschubspannung überhaupt voll ausbilden kann. Daher dürfte für den Gleitwiderstand der zuvor behandelte Ansatz vielleicht besser zutreffen, der die Schubspannung an den Schichtflächen proportional ihrer gegenseitigen Verschiebung setzt. Trotzdem wurde der Vollständigkeit halber diese Untersuchung auf dem eingangs unter a) beschriebenen Wege fortgeführt. Einen Einblick in die Vorgänge gibt folgende Betrachtung. Anfangs wirkte nur der gleichmäßige Druck p_0 . Die Schichtung verhält sich zunächst wie ein isotroper Körper und die Spannungen aus einer beginnenden periodisch verteilten Belastung p_1 klingen ab wie in der isotropen Halbebene. Die maximale Schubspannung tritt dann in einer Tiefe $y = a/\pi$ auf, das ist für $2a/h = 30$ bei der 5. Schicht der Fall. Mit zunehmender Belastung p_1 beginnt zuerst diese Schicht zu gleiten, dann folgen weitere Schichten bis alle Schichten der Gleitzone $y < \bar{y}$ von Relativverschiebungen erfaßt sind. Im Gleitgebiet klingt die periodische Druckspannung σ_{y1} nach dem gleichen Gesetz ab, wie bei einer reibungsfreien Schichtung (gemäß λ_1 von Gl. (8) für $R = 0$). Es mag zunächst überraschen, daß im Bereich der gleitenden Schichten die Druckspannung unabhängig von der Reibung ist. Der Grund liegt darin, daß nach Überwindung der Haftreibung einer Verschiebung kein zusätzlicher Widerstand mehr entgegengesetzt wird.

Bild 3 zeigt für eine Schichtung mit der bezogenen Periodenlänge $2a/h = 20$ der Belastung und mit der Reibungszahl $\mu = 0,02$ den Verlauf des bezogenen Druckspannungsanteils σ_{y1}/p_0 über dem bezogenen Randabstand $y/2a$ für $p_1/p_0 = 0,2$ bis 1. Man erkennt, daß in dem betrachteten Beispiel der Anteil der periodischen Druckbelastung, der im Haftgebiet aufgezehrt wird und zur Vorbereitung der Gleitungen dient, etwa $\sigma_{y1}/p_0 = 0,2$ beträgt. Die gestrichelte Fortsetzung der Spannungskurven bezieht sich auf die reibungsfreie Schichtung.

Eine ausführliche Darstellung erscheint demnächst.²⁾

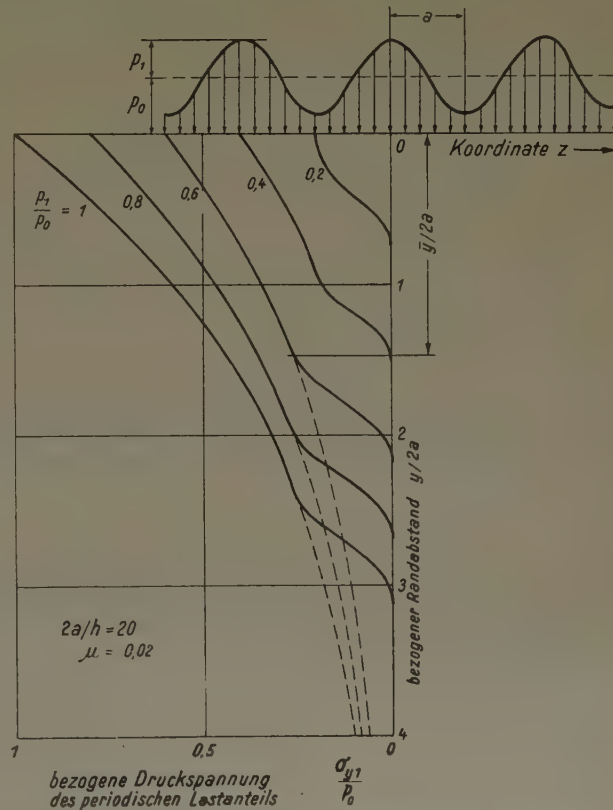


Bild 3. Abklingen der bezogenen Druckspannung σ_{y1}/p_0 des periodischen Lastanteils mit dem bezogenen Randabstand $y/2a$ bei verschiedenen Werten der bezogenen Druckamplitude p_1/p_0 für ein Verhältnis der Periodenlänge zur Schichtdicke $2a/h = 20$ und für eine Reibungszahl $\mu = 0,02$. Die gestrichelte Fortsetzung der Spannungskurven bezieht sich auf die reibungsfreie Schichtung. \bar{y} Wert des Randabstands y , bis zu dem die Schichten am Gleiten teilnehmen, σ_{y1} Druckspannung in y -Richtung infolge des periodischen Druckbelastungsanteils p_1 .

F. STRÖMUNGSLEHRE

Einige Strömungsprobleme der Turbomaschinen*)

VON WERNER ALBRING

Die Beschäftigung mit den Strömungsmaschinen zeigte manche neue Problemstellungen auf; die besonderen Randbedingungen führten zu speziellen Rechenmethoden und zur verstärkten Anwendung von Analogien. Bei einigen dreidimensionalen Vorgängen ist erst eine Beschreibung des physikalischen Verlaufes möglich, die aber dem Mathematiker Anregung zur Mitarbeit geben soll.

Zur Gestaltung von ebenen Schaufelgittern mit großer Umlenkung und Nachrechnung der Strömung wurde eine geometrische Lösung der Potentialgleichung ausgearbeitet, die auch bei kompressiblen Gasen anwendbar ist. Handelt es sich um die Bestimmung der Geschwindigkeit bei einem vorliegenden Gitter, so ermöglicht eine neuartige Auswertung von PRANDTLs Seifenhautanalogie mit Spiegelung eines Liniennetzes an der Haut sogleich die Photographie der Isotachen und Isoklinen des Strömungsfeldes. Beide Methoden sind sowohl für die Potentialströmung als auch für die drehbehaftete Strömung in rotierenden Laufrädern anwendbar, sie stünden darüber hinaus auch anderen Anwendungen der LAPLACESchen und POISSONSchen Differentialgleichungen auf ebene Probleme zur Verfügung.

Wichtig ist die Beurteilung der Ablösungsgefahr auf den Schaufeln der Flügelgitter. Verfahren verschiedener Autoren unterscheiden sich erheblich in ihren Aussagen.

Eine neue Auswertung von Grenzschichtmessungen lieferte δ^*/δ^{**} und $\tau/\rho \bar{c}^2$ abhängig von der HAGENschen Zahl mit der REYNOLDSzahl als Parameter. Hiermit wäre die Impulsgleichung der Grenzschichten, eine nichtlineare Differentialgleichung erster Ordnung mit variablen Koeffizienten, auch bei Turbulenz nach der Isoklinenmethode lösbar.

Die Stromlinien auf seitlichen Begrenzungswänden von Flügelgittern unterscheiden sich ganz erheblich von denen in größerem Wandabstand, die potentialtheoretisch erfaßbar sind. Auffällig ist, daß schon stromaufwärts vom Gitter sich Stromlinien auf den Wänden verzweigen und daß Stromfäden von den Wänden auf die Saugseite treffen. Durch umfangreiche Messungen konnte der Zusatzwiderstand im Wandbereich gerader Flügelgitter als Funktion des Zu- und Abströmwinkels angegeben werden.

Da die räumliche Potentialströmung bei vorgeschriebenen Berandungen analytisch nur mit außerordentlichem Rechenaufwand erfaßbar wäre, wird das elektroanaloge Experiment eingesetzt, das tiefen Einblick in den Ablauf räumlicher Strömungen vermittelt und auf Möglichkeiten zur günstigen Gestaltung durchströmter Bauteile hinweist.

Bei geraden Kreiskegeldiffusoren wurde festgestellt, daß der Drall nur dann den Wirkungsgrad hebt, wenn die Drehung im Anfangsquerschnitt ähnlich wie bei einem starren Körper erfolgt, Drallverteilungen nach $c_u \cdot r = \text{const}$ oder $\alpha = \text{const}$ vermindern den Wirkungsgrad.

Eine ausführliche Wiedergabe des Vortrages erfolgt in der Festschrift zum 60. Geburtstag von Prof. TOLLMIE.

Anschrift: Prof. Dr.-Ing. W. ALBRING, Dresden A 20, Südhöhe 9

*) Auf Einladung der Tagungsleitung gehaltener Hauptvortrag.

Weiterentwicklung der ähnlichen Grenzschichten
bei gestörtem Profil*)

VON MARTIN FIEBIG

Das Verhalten der ähnlichen Grenzschichten stromab einer Stelle $x = x_0$ wird untersucht, wenn das Grenzschichtprofil an dieser Stelle gestört wird.

Führt man in die PRANDTLschen Grenzschichtgleichungen für die laminare, zweidimensionale, stationäre, inkompressible Grenzschicht die neue abhängige Veränderliche

$$F(\xi, \eta) = \frac{\Psi(x, y)}{\left\{ 2\nu \int_0^x U(x) dx \right\}^{1/2}}, \quad \dots \dots \dots (1),$$

*) Aus dem Institut für Theoretische Gasdynamik der DVL, Aachen.

die eine modifizierte Stromfunktion ist, und die neuen unabhängigen Veränderlichen

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{1}{\nu} \int_0^x U(x) dx \\ \eta &= \frac{U(x) y}{\left\{ 2 \nu \int_0^x U(x) dx \right\}^{1/2}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

und, so erhält man die von H. GÖRTLER [1] für die „Neue Reihe“ benutzte Form der Grenzschichtgleichungen:

$$F_{\eta\eta\eta} + F F_{\eta\eta} + \beta(\xi) \{1 - F_{\eta}^2\} = 2\xi \{F_{\eta} F_{\xi\eta} - F_{\xi} F_{\eta\eta}\} \dots \dots \dots (3)$$

Die Funktion $\beta(\xi)$ wurde von GÖRTLER als Hauptfunktion bezeichnet und ist durch

$$\beta(\xi) = 2 \int_0^x U(x) dx \frac{U'(x)}{U^2(x)} \dots \dots \dots (4)$$

gegeben.

Die Randbedingungen für (3) sind

$$F(\xi, 0) = F_{\eta}(\xi, 0) = 0 \dots \dots \dots (5a),$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} F_{\eta}(\xi, \eta) = 1 \dots \dots \dots (5b).$$

Sie entsprechen den Bedingungen des Haftens an der Wand und dem asymptotischen Verhalten der Geschwindigkeit im Unendlichen.

Für die Eindeutigkeit einer Lösung von (3) ist noch die Vorgabe eines Anfangsprofils an einer Stelle x_0 notwendig.

$$u(x_0, y) = U(x_0) F_{\eta}(\xi_0, \eta) = \bar{u}(y) \dots \dots \dots (5).$$

GÖRTLER entwickelt bei der „Neuen Reihe“ die Hauptfunktion $\beta(\xi)$ und die Stromfunktion $F(\xi, \eta)$ in eine Potenzreihe von ξ

$$\beta(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \xi^k \dots \dots \dots (6a),$$

$$F(\xi, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} G_k(\eta) \xi^k \dots \dots \dots (6b)$$

Nach Einsetzen von (6) in (3) und Vergleich der Koeffizienten bei gleichen Potenzen von ξ erhält man ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen dritter Ordnung, das sich rekursiv lösen läßt.

Dem Potenzreihenansatz (6) liegt die Annahme zu Grunde, daß als Anfangsprofil das singuläre Verhalten der Stromfunktion an der Stelle $x_0 = \xi_0 = 0$ gewählt wird. Die Stelle $x_0 = 0$ ist der Punkt, wo sich die ankommende Strömung teilt. Durch den Ansatz (6) erhält man in der Nähe der singulären Stelle $x_0 = 0$ immer ein ähnliches Grenzschichtprofil.

Will man das Verhalten der gestörten ähnlichen Grenzschicht stromab einer Stelle $x = x_0 \neq 0$ studieren, so ist dies mit dem Potenzreihenansatz (6) nicht möglich. Auch alle anderen bisher gemachten Reihenentwicklungen sind für die Behandlung dieses Problems untauglich. Es empfiehlt sich vielmehr ein Potenzreihenansatz der Form:

$$\beta(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k (\xi - \xi_0)^k \dots \dots \dots (7a),$$

$$F(\xi, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} H_k(\eta) (\xi - \xi_0)^k \dots \dots \dots (7b),$$

oder noch besser für den hier vorliegenden Fall

$$\beta(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k [\ln(\xi/\xi_0)]^k \dots \dots \dots (8a),$$

$$F(\xi, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(\eta) [\ln(\xi/\xi_0)]^k \dots \dots \dots (8b),$$

wie von K. OSWATITSCH vorgeschlagen wurde.

Betrachtet man Störungen, die die Potentialströmung nicht beeinflussen, so bedeutet das, daß die Hauptfunktion unverändert erhalten bleibt. Die ähnlichen Grenzschichten sind aber dadurch gekennzeichnet, daß $F(\xi, \eta)$ nur eine Funktion der Ähnlichkeitsveränderlichen η allein ist. Daraus folgt mit (3), daß $\beta(\xi)$ konstant ist. Durch den Ansatz (7b) oder (8b) wird die Strömung an der Stelle $\xi = \xi_0$ durch das erste Glied der Potenzreihe, $F_0(\eta)$, das sich aus der Stromfunktion der ähnlichen Grenzschichten $F_A(\eta)$ und einer Störstromfunktion $F_s(\eta)$ zusammensetzt, allein beschrieben. Die Stromfunktion der ähnlichen Grenzschicht $F_A(\eta)$ ist bekannt, die Störstromfunktion kann beliebig angenommen werden, soweit sie nur die Randbedingungen und Grenzschichtbindungen erfüllt. Stromab der Stelle $\xi = \xi_0$ ist die Ähnlichkeit der Grenzschicht durch die Störstromfunktion $F_s(\eta)$ zerstört worden, weil sie weitere induzierte Störungen hervorruft, die für $\xi > \xi_0$ zum Tragen kommen.

Führt man den Ansatz (8) in die Differentialgleichung ein, wobei (8a) nur ein Glied, nämlich β_0 , liefert, so erhält man nach Vergleich der Koeffizienten bei gleichen Potenzen von $\ln \xi/\xi_0$ das folgende System von gewöhnlichen, linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung für die unbekannten Funktionen $F_{k+1}(\eta)$, ($k = 0, 1, 2, \dots$), das sich rekursiv lösen läßt.

$$2(F_0' F_1' - F_0'' F_1) = F_0''' + F_0 F_0'' + \beta_0 (1 - F_0'^2) \quad \dots \quad (9a)$$

$$\left. \begin{aligned} 2(k+1)(F_0' F_{k+1}' - F_0'' F_{k+1}) &= F_k''' + \sum_{i=0}^k F_i F_{k-i}'' - \beta_0 \sum_{i=0}^k F_i' F_{k-i}' \\ &+ -2 \left\{ \sum_{i=0}^{k-1} (F_{i+1}' F_{k-i}' - F_{i+1} F_{k-i}'') (i+1) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (9b)$$

($k = 1, 2, 3, \dots$)

Für dieses System 1. Ordnung läßt sich nur noch eine Randbedingung

$$F_{k+1}(0) = 0; \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad \dots \quad (10)$$

vorgeben. Es bleibt zu prüfen, ob die physikalischen Randbedingungen des Haftens der Strömung an der Wand und des asymptotischen Verhaltens der Geschwindigkeit im Unendlichen

$$F_{k+1}'(0) = 0; \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad \dots \quad (11a)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} F_{k+1}'(\eta) = 0; \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad \dots \quad (11b)$$

automatisch immer erfüllt werden. Es zeigt sich, daß dies tatsächlich der Fall ist, was in einer zur Veröffentlichung vorgesehenen ausführlicheren Arbeit bewiesen wird.

Das besondere des Systems (9) ist, daß die bekannten Koeffizienten, die in dem System auftreten, höherer Ordnung sind als das System selbst. Die Lösung des Systems (9) mit der Randbedingung (10) läßt sich sofort hinschreiben:

$$F_1(\eta) = \frac{F_0'}{2} \int_0^\eta \frac{F_0''' + F_0 F_0'' + \beta_0 (1 - F_0'^2)}{F_0'^2} d\eta \quad \dots \quad (12a),$$

$$F_{k+1}(\eta) = \frac{F_0'}{2(k+1)} \int_0^\eta \frac{F_k''' + \sum_{i=0}^k F_i F_{k-i}'' - \beta_0 \sum_{i=0}^k F_i' F_{k-i}' - 2 \left\{ \sum_{i=0}^{k-1} (i+1) (F_{i+1}' F_{k-i}' - F_{i+1} F_{k-i}'') \right\}}{F_0'^2} d\eta \quad (12b).$$

Die Störung $F_s(\eta)$ ist wegen der Voraussetzung, daß die Potentialströmung, die zu einer ähnlichen Grenzschicht gehört, unverändert erhalten bleibt, nicht völlig frei wählbar. Sie muß den Grenzschichtbindungen genügen, wovon die ersten wie folgt lauten:

$$\left. \begin{aligned} F_s(0) &= 0, & F_s'(0) &= 0, & F_s''(0) &= \text{frei wählbar}, \\ F_s'''(0) &= 0, & F_s^{IV}(0) &= 0, & F_s^V(0) &= \text{frei wählbar}, \\ F_s^{VI}(0) &= (4 - 6\beta_0)\beta_0 F_s''(0); & F_s^{VII}(0) &= 0; & F_s^{VIII}(0) &= \text{frei wählbar}, \\ F_s^{IX}(0) &= -18 F_0^{VI}(0) F_1'(0) - 14 \beta_0 F_1^V(0) + (10 F_0''(0) - 4\beta_0) F_1^{VI}(0) \\ &+ - (16 - 12\beta_0) \{ F_s''(0) F_s^{VI}(0) + F_A''(0) \cdot F_s^{VI}(0) + F_s'(0) F_A^{VI}(0) \\ &+ (26 - 30\beta_0)\beta_0 F_s^V(0) \} \end{aligned} \right\} \quad (13).$$

Läßt man die Voraussetzung der ungestörten Potentialströmung fallen, so treten die Grenzschichtbindungen (13) für die Störung nicht auf. Dafür sind dann die β_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) in (7a) und (8a) im allgemeinen verschieden von Null.

Der Spezialfall der gestörten Plattengrenzschicht bei ungestörter Außenströmung wurde numerisch behandelt. Als Störung wurden zwei Polynome 5. Grades verwandt, die so gewählt wurden, daß die Störgeschwindigkeit bei $\eta = 0$ und $\eta = 2,0$ identisch verschwindet. Für $\eta \geq 2,0$ wurden sämtliche Ableitungen der Störung identisch null gesetzt. Durch diese Wahl der Störung

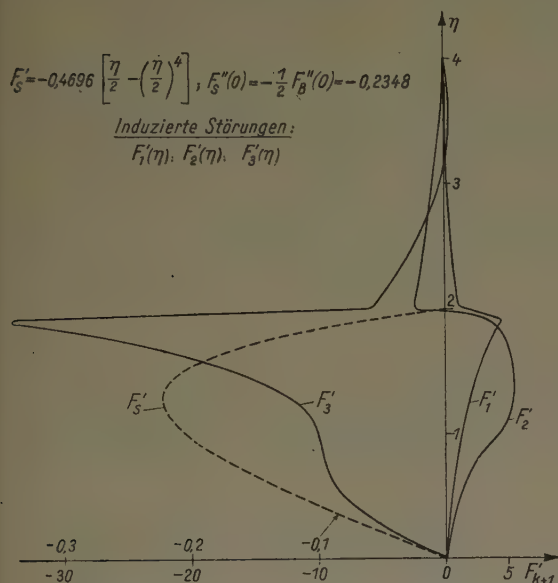


Bild 1. Störung der Plattengrenzschicht; Wand Schubspannung der Störung bei $\xi = \xi_0$ gleich 50% der negativen Platten-Wand Schubspannung

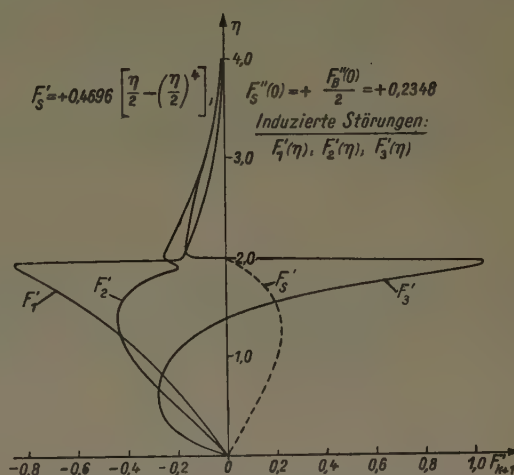


Bild 2. Störung der Plattengrenzschicht; Wand Schubspannung der Störung bei $\xi = \xi_0$ gleich 50% der Platten-Wand Schubspannung

ergibt sich ein Sprung in der durch die Störung verursachten Schubspannung bei $\eta = 2,0$. Die durch die Störung hervorgerufene Wand Schubspannung reduzierte bzw. erhöhte die Wand Schubspannung der Plattengrenzschicht jeweils um 50%. Aus den Ergebnissen für die ersten drei induzierten Störungen ist das nichtlineare Verhalten der Grenzschichtgleichungen gegenüber Störungen sehr gut zu ersehen (Bild 1, 2). Eine positive Geschwindigkeitsstörung bewirkt völlig andere induzierte Störungen als eine negative. Die schlechte Konvergenz der induzierten Störungen bei $\eta = 2,0$ ist auf den Sprung in der Schubspannung der Störung $F_5(\eta)$ an der Stelle $\eta = 2,0$ zurückzuführen.

Literatur

[1] H. GÖRTLER, Journal of Math. and Mech. Vol. 6/1 (1957).

Anschrift: Dipl.-Ing. M. FIEBIG, Institut für theoretische Gasdynamik der DVL, Aachen, Theaterstr. 13

Berechnung der Strömung durch ein radiales Laufrad unter Berücksichtigung der veränderlichen Breite der Schaufeln

VON MANFRED HOFFMEISTER

Bei der Berechnung der ebenen, inkompressiblen Strömung durch radiale Laufräder sind mit Hilfe des Singularitätenverfahrens beachtliche Fortschritte erzielt worden. Mit Hilfe des Superpositionsprinzips konnten die Ergebnisse der axialen Gittertheorie nutzbar gemacht werden. Besonders einfach und schnell anwendbar wird das Berechnungsverfahren, wenn linienhafte Radialschaufeln für die Berechnung der induzierten Geschwindigkeiten durch Stücke logarithmischer Spiralen angenähert werden können. Dann können die tabellierten Abwindfunktionen von SCHLICHTING [1] benutzt werden. Die Strömung durch Radialräder ist aber oft nicht eben infolge veränderlichen Abstandes der seitlichen Begrenzungswände. Dieser Einfluß soll auf einfache Weise näherungsweise berücksichtigt werden.

Die Änderung der Breite in Abhängigkeit vom Radius soll so beschaffen sein, daß es genügt, die Kontinuität im Mittel zu erfüllen. Da die Strömung quellenfrei sein soll, erhält man

$$\frac{\partial \left(\frac{b}{b_2} r \bar{w}_r \right)}{\partial r} + \frac{b}{b_2} \frac{\partial \bar{w}_s}{\partial \varepsilon} = 0 \quad \dots \quad (1).$$

Für die mittlere Drehung eines Teilchens zwischen den Schaufeln ergibt sich wie im ebenen Fall

$$\frac{\partial (r \bar{w}_s)}{\partial r} - \frac{\partial \bar{w}_r}{\partial \varepsilon} = 2 r \omega \quad \dots \quad (2).$$

Durch Einführen einer Stromfunktion können diese Gleichungen zu einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung zusammengefaßt werden.

$$\frac{b_2}{b} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}_{rel}}{\partial \varepsilon^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Psi}_{rel}}{\partial r^2} + \frac{\partial \bar{\Psi}_{rel}}{\partial r} \left(\frac{1}{r} - \frac{d \frac{b}{b_2}}{\frac{b}{b_2} dr} \right) \right] = -2 \omega \quad \dots \quad (3).$$

Durch den Ansatz

$$\bar{\Psi}_{rel} = - \int \frac{b}{b_2} r \omega dr + \sum_m \bar{\Psi}_m \quad \dots \quad (4)$$

reduziert sich das Problem auf die Behandlung einer drehungsfreien Strömung bei veränderlicher Breite, da die $\bar{\Psi}_m$ nur noch

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \varepsilon^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial r^2} + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial r} \left(\frac{1}{r} - \frac{d \frac{b}{b_2}}{\frac{b}{b_2} dr} \right) = 0 \quad \dots \quad (3a)$$

befriedigen müssen. Zur Lösung der Gl. (3a) setzen wir

$$\bar{\Psi} = f(r) \Psi \quad \dots \quad (5)$$

an. Das ist naheliegend, da auch die Breite nur vom Radius abhängt. Ψ soll die Stromfunktion einer bekannten ebenen Strömung sein, d. h. die Gleichung

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varepsilon^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0 \quad \dots \quad (3b)$$

erfüllen. Durch Einführen der Gl. (5) in Gl. (3a) und unter Beachtung von Gl. (3b) ergibt sich

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} \left(2 \frac{df}{dr} - \frac{f d \frac{b}{b_2}}{\frac{b}{b_2} dr} \right) + \Psi \left(\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{df}{dr} \frac{d \frac{b}{b_2}}{\frac{b}{b_2} dr} \right) = 0 \quad \dots \quad (6).$$

Eine einfache Lösungsmöglichkeit besteht in der Forderung, daß die Koeffizienten dieser Gleichung verschwinden. Damit ist aber gleichzeitig eine Einschränkung verbunden, weil der Breitenverlauf $b/b_2(r)$ nicht mehr frei wählbar ist. Da die sich ergebenden Breitenverteilungen günstig sind, bedeutet diese Einschränkung keinen großen Nachteil. Durch Integration folgt aus dieser Bedingung

$$\frac{b}{b_2} = f^2, \quad f = \frac{1}{1 + P \ln \frac{r}{r_2}}, \quad P = \frac{1 - \sqrt{\frac{b_2}{b_1}}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad \dots \quad (7)$$

dabei wurden die Integrationskonstanten durch zweckmäßige Randbedingungen

$$r = r_2 \rightarrow \frac{b}{b_2} = 1, \quad f = 1$$

$$r = r_1 \rightarrow \frac{b}{b_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

bestimmt. Der Parameter P stellt ein Maß für die Breitenveränderlichkeit dar.

Geht man von dem Ansatz (5) auf die Geschwindigkeiten über, so erhält man unter Beachtung der Zusammenhänge zwischen Stromfunktion und Geschwindigkeiten

$$\bar{c}_r = \sqrt{\frac{b_2}{b}} c_r \quad \dots \dots \dots (8a),$$

$$\bar{c}_s = \sqrt{\frac{b_2}{b}} c_s + \frac{P}{r} \Psi \quad \dots \dots \dots (8b).$$

Die Geschwindigkeiten bei breitenveränderlicher Strömung können also aus den Geschwindigkeiten bekannter ebener Strömung gewonnen werden. Dabei tritt die Stromfunktion dieser ebenen Strömung als Zusatzglied auf. Ihre Berechnung ist die zusätzliche Arbeit gegenüber einer ebenen Lösung. In der Anwendung auf Radialgitter muß die Beziehung (8) auf die induzierten Geschwindigkeiten der Singularitäten angewendet werden, die anderen Strömungskomponenten kann man leicht direkt erhalten.

Da die Stromfunktion Ψ in die Geschwindigkeiten eingeht, muß sie im ganzen Strömungsfeld eindeutig sein. Diese Forderung erfüllen die Wirbelsingularitäten, die deshalb noch näher untersucht werden sollen. Die Änderung der Intensität Γ eines Wirbels in einer ebenen Strömung beim Übergang auf eine breitenveränderliche Strömung kann mit Gl. (8) zu

$$\bar{\Gamma} = \oint \bar{c}_s ds = \sqrt{\frac{b_2}{b_R}} \Gamma \quad \dots \dots \dots (9)$$

erhalten werden, d. h. die Zirkulation ändert sich proportional der Wurzel aus dem örtlichen Breitenverhältnis. Eine Anwendung auf kontinuierliche Wirbelverteilungen ist ebenfalls möglich. Das Singularitätenverfahren kann in der sonst üblichen Form benutzt werden.

Literatur

- [1] H. SCHLICHTING, Berechnung der reibungslosen inkompressiblen Strömung für ein vorgegebenes ebenes Schaufelgitter. VDI-Forschungsheft 447.

Anschrift: Dipl.-Ing. M. HOFFMEISTER, Dresden N 23, Weinbergstr. 94

Das Rayleigh-Syngesche Stabilitätskriterium für stationäre und instationäre zähe Strömungen

Von KLAUS KIRCHGÄSSNER*)

1. Einleitung

Gegegenstand dieser Untersuchung sollen Stabilitätsaussagen über stationäre und instationäre Schichtenströmungen zwischen zwei coaxialen, in Richtung der Erzeugenden beidseitig unendlich langen Zylindern sein. Diesen Strömungen, die nur von der Radialrichtung und der Zeit abhängen dürfen, werden kleine Störungen von TAYLORSchen Typ überlagert — diese sind unabhängig vom Azimutwinkel und periodisch in Richtung der Zylindererzeugenden —. Es soll eine hinreichende Bedingung für die Stabilität der zugelassenen Grundströmungen gegenüber den hier betrachteten Störungen abgeleitet werden.

Erste Aussagen in dieser Richtung gehen zurück auf Lord RAYLEIGH [1], der unter Vernachlässigung der Reibungskräfte zeigte, daß Stabilität sicher dann vorliegt, wenn die Zirkulation mit wachsendem Radialabstand zunimmt.

Später wurde dieses Kriterium für die stationär rotierenden Zylinder von J. L. SYNGE [2] in Strenge bewiesen. Allerdings ist sein Beweis an die spezielle Gestalt der Grundströmung gebunden und enthält darüber hinaus keine Aussagen über die Stärke der Störungsdämpfung.

Erwähnt sei in diesem Zusammenhang ein in jüngster Zeit erschienenenes hinreichendes Stabilitätskriterium von J. SERRIN [3] für beliebige dreidimensionale, instationäre Grundströmungen und Störungen, das insbesondere auch für endliche Störungen gilt. Die Aussage dieses Kriteriums ist in einigen Fällen sogar schärfer, in andern wiederum schwächer als die des RAYLEIGH-SYNGESchen Kriteriums.

Diese Untersuchung ist, wie diejenigen von RAYLEIGH und SYNGE auf kleine Störungen beschränkt. Sie enthält einen Beweis des genannten Kriteriums, der nicht auf die von SYNGE betrachtete COUETTE-Strömung beschränkt ist, sondern unter schwachen Einschränkungen für

*) Aus dem Institut für angewandte Mathematik der Universität Freiburg und dem Institut für angewandte Mathematik und Mechanik der DVL an der Universität Freiburg.

jede zylindersymmetrische Grundströmung gilt; z. B. für die Strömung in einem gekrümmten Kanal. Der Beweis liefert ferner eine Aussage über die Stärke der Störungsdämpfung, und er läßt sich auf stationäre Grundströmungen übertragen.

2. Die Grundgleichungen für die Störungen

Zur Untersuchung der Stabilität der Strömung zwischen zwei unendlich langen coaxialen Kreiszylindern — ihre Krümmungsradien seien R_1 und R_2 ($R_1 < R_2$) — führen wir zweckmäßigerweise Zylinderkoordinaten (r, φ, z) ein. Die Geschwindigkeitskomponenten bezeichnen wir mit u, v, w . (Betrachtet man die Stabilitätsverhältnisse im gekrümmten Kanal, dann muß der Wertebereich des Azimutwinkels φ auf einen echten Teilbereich des Intervalls $[0, 2\pi]$ eingeschränkt werden.)

Sämtliche im folgenden auftretenden variablen Längen seien von vornherein mit der Bezugslänge h ($h = R_2 - R_1$), desgleichen alle variablen Geschwindigkeiten mit einer Bezugsgeschwindigkeit V_0 , die Zeit t mit V_0/h und der Druck p mit ρV_0^2 (ρ = Dichte) dimensionslos gemacht. Ferner schreiben wir für den dimensionslosen Krümmungsradius: $\bar{R}_i = R_i/h$, ($i = 1, 2$), und definieren die REYNOLDSSche Zahl durch die Beziehung: $Re = V_0 h / \nu$ (ν = kinematische Zähigkeit).

Der stationären Grundströmung $v_0(r)$ werden nun in üblicher Weise Störungen überlagert:

$$\left. \begin{aligned} u(r, z, t) &= u_1(r) \cos \sigma z e^{\gamma t} \\ v(r, z, t) &= v_0(r) + v_1(r) \cos \sigma z e^{\gamma t} \\ w(r, z, t) &= w_1(r) \sin \sigma z e^{\gamma t} \\ p(r, z, t) &= p_0(r) + p_1(r) \cos \sigma z e^{\gamma t} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2.1).$$

Hierbei gibt die „Wirbelzahl“ σ die Anzahl der Wirbelpaare in einem Intervall der Länge $2\pi h$ und γ den Anfachungsgrad an.

Die Differentialgleichungen für die Störungskomponenten lauten nun, wenn man in den Störungssamplituden linearisiert und w_1 und den Druck eliminiert (vgl. etwa J. L. SYNGE [2]):

$$\left. \begin{aligned} L[u_1(r)] &= U(r), \\ L_1[U(r)] &= -2\sigma^2 Re \frac{v_0(r)}{r} v_1(r) \\ L_1[v_1(r)] &= -2A Re u_1(r) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2.2),$$

mit den Randbedingungen:

$$\left. \begin{aligned} u_1(\bar{R}_1) &= u_1(\bar{R}_2) = 0; & \frac{du_1(\bar{R}_1)}{dr} &= \frac{du_1(\bar{R}_2)}{dr} = 0, \\ v_1(\bar{R}_1) &= v_1(\bar{R}_2) = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2.2a)$$

und mit den Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) - \left(\sigma^2 + \frac{1}{r^2} \right); & L_1 &= L - \gamma Re \\ 2A(r) &= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r v_0). \end{aligned}$$

3. Das allgemeine Rayleigh-Syngesche Kriterium für stationäre Grundströmungen

Das von RAYLEIGH für reibungsfreie Flüssigkeiten bewiesene allgemeine Stabilitätskriterium lautet in der obigen Bezeichnungsweise: Falls v_0 und A im ganzen Strömungsbereich nicht negativ sind, ist die Grundströmung gegenüber den hier betrachteten Störungen stabil.

Wir beweisen unter der Voraussetzung, daß v_0 und A holomorphe Funktionen sind, für reibende Flüssigkeiten den in seiner Aussage weitergehenden

Satz 1: Falls v_0 und A in jedem Punkt des Intervalls $I = \{\bar{R}_1 \leq r \leq \bar{R}_2\}$ holomorphe Funktionen von r sind, und falls in I $v_0 \geq 0$ und $A \geq 0$ gilt, dann folgt:

$$\gamma \leq \gamma_0 = -\frac{1}{Re} \left(\sigma^2 + \frac{1}{\bar{R}_2^2} \right).$$

Wir führen den Beweis indirekt.

1) $v_0 > 0$; $A > 0$ in I .

Angenommen, es existiere eine nichttriviale Lösung von (2.2) und (2.2a) mit $\gamma > \gamma_0$. Wegen der Holomorphie von v_0, A und der in L und L_1 auftretenden Koeffizientenfunktionen kann u_1 nur endlich viele Vorzeichenwechsel in I besitzen; ihre Anzahl sei n . Ist n gerade (für ungerades n

verläuft der Beweis ganz analog), so hat u_1 in der Umgebung der Randpunkte $r = \bar{R}_i$ dasselbe Vorzeichen. Wir nehmen an, u_1 sei dort negativ. Wegen $L[u_1] = U$, (2.2a) und $u_1 \neq 0$ ist dann auch U in der Umgebung dieser Punkte negativ. Da U außerdem an den Stellen, wo u_1 ein positives Maximum bzw. ein negatives Minimum annimmt, negativ bzw. positiv ist, besitzt U im Innern von I mindestens $n + 2$ Vorzeichenwechsel sowie mindestens $n + 1$ positive Maxima und negative Minima zusammen; bei dieser Zählung liegt je ein positives Maximum den beiden Randpunkten am nächsten.

Wegen der Annahme $\gamma > \gamma_0$ und der zweiten Gleichung in (2.2) ist v_1 positiv bzw. negativ, wo U ein positives Maximum bzw. ein negatives Minimum besitzt. v_1 hat nun wegen (2.2a) wiederum mindestens $n + 1$ positive Maxima und negative Minima zusammen, und den Randpunkten liegt bei dieser Zählung auch diesmal je ein positives Maximum am nächsten.

Den gleichen Schluß auf die dritte Gleichung in (2.2) angewendet, ergibt dieselbe Aussage für u_1 . Da nun aber u_1 in der Umgebung der Randpunkte negativ sein sollte, muß u_1 in I mindestens $n + 2$ Vorzeichenwechsel haben, im Widerspruch zur Annahme.

2) $v_0 \geq 0$; $A \geq 0$; ($v_0 \neq 0$, $A \neq 0$) in I .

Besitzt etwa A Nullstellen in I und fällt eine dieser Nullstellen ($r = r_1$) mit einem positiven Maximum von v_1 zusammen, so gilt in allen hinreichend nahe an dieser Stelle gelegenen Punkten mit $r > r_1$: $L_1[v_1] < 0$. Für eine hinreichend kleine rechtsseitige Umgebung eines negativen Minimums gilt entsprechend $L_1[v_1] > 0$. Da im obigen Beweis nur diese Vorzeichenaussagen benutzt wurden, ist damit die Behauptung auch für diesen Fall bewiesen.

3) $v_0 \equiv 0$ oder $A \equiv 0$ in I .

Dann ist aber sicher $U \equiv 0$ oder $v_1 \equiv 0$, und damit verschwinden auch alle übrigen Störungskomponenten identisch. Hiermit ist die Behauptung des Satzes vollständig bewiesen.

Bemerkung: In etwas modifizierter Form gilt die Aussage des obigen Satzes auch für unbeschränkte Intervalle I .

Zunächst hat man als Bezugslänge eine andere geeignete Länge zu wählen. Ersetzt man dann die Holomorphieforderung für v_0 und A durch die Voraussetzung, daß u_1 in I nur endlich viele Vorzeichenwechsel hat, (d. h. man läßt nur solche wirbelartigen Störungen zu, die endlich viele Wirbelkerne besitzen), so gilt die Aussage des Satzes auch in diesem Fall.

4. Die Erweiterung des Kriteriums auf instationäre Grundströmungen

Der obige Beweisgedanke läßt sich unter Zuhilfenahme eines Satzes von L. NIRENBERG [4]¹⁾ über lineare parabolische Differentialgleichungen für den Beweis des Stabilitätskriteriums für instationäre Grundströmungen verwenden. Man hat zunächst in (2.1) $u_1(r) e^{\gamma t}$, $v_1(r) e^{\gamma t}$ und $w_1(r) e^{\gamma t}$ durch $u_1(r, t)$, $v_1(r, t)$ und $w_1(r, t)$ zu ersetzen und erhält dann an Stelle von (2.2) ein System linearer parabolischer Differentialgleichungen.

Hier sei nur noch die Aussage des Kriteriums angegeben. Der Beweis soll in anderem Zusammenhang in Kürze veröffentlicht werden.

Satz 2: Sei $v_0(r, t) \geq 0$, $A(r, t) = \frac{\partial v_0(r, t)}{\partial r} + \frac{v_0(r, t)}{r} \geq 0$ für $r \in I$ und $t \in I_1 = \{0 \leq t < \infty\}$.

Ferner wechsele u_1 für jedes $t_0 \in I_1$ nur endlich oft das Vorzeichen in I .

Dann gilt

$$|u_1(r, t)| < u_{1M} \exp \left\{ - \left(\sigma^2 + \frac{1}{R_2^2} \right) t \right\},$$

mit

$$u_{1M} = \max_I \{|u_1(r, t = 0)|\}$$

und entsprechende Ungleichungen für v_1 und w_1 .

Literatur

- [1] Lord RAYLEIGH, On the dynamics of revolving fluids. Scientific Papers, 6, Cambridge University Press, S. 447.
- [2] J. L. SYNGE, On the stability of a viscous liquid between rotating coaxial cylinders. Proc. Roy. Soc. A, 167 (1938), S. 250.
- [3] J. SERRIN, On the stability of a viscous fluid motion. Arch. Rat. Mech. Anal. 3 (1959), S. 1.
- [4] L. NIRENBERG, A strong maximum principle for parabolic equations. Comm. Pure Appl. Math. 6 (1953), S. 167.
- [5] W. VELTE, Eine Anwendung des Nirenbergschen Maximumprinzips für parabolische Differentialgleichungen in der Grenzschichttheorie. Arch. Rat. Mech. Anal., im Druck.

Anschrift: Dr. K. KIRCHGÄSSNER, Freiburg i. Br., Bernlappstr. 21

¹⁾ Dieser NIRENBERGSche Satz wurde meines Wissens erstmals von W. VELTE [5] im Rahmen der Grenzschichttheorie beim Beweis allgemeiner Eigenschaften von Lösungen der Grenzschichtgleichungen benutzt.

Zur Berechnung der Druckverteilung an Strahlflügelprofilen

VON HANS-JOACHIM MASCHECK

Über die Berechnung der Umströmung von Strahlflügelprofilen sind in den vergangenen Jahren zahlreiche Arbeiten erschienen, die z. T. von stark vereinfachenden Voraussetzungen ausgehen. Im Zusammenhang mit experimentellen Arbeiten am Institut für Angewandte Aerodynamik der TH Dresden ergab sich das Bedürfnis nach einer genaueren Berücksichtigung der Profilform und des Einflusses der Strahlvermischung bei der theoretischen Behandlung.

Die Umströmung eines Strahlflügelprofils besitzt kontinuierlich verteilte Wirbel in der Profilhinterkante und am Strahl. Zur Vereinfachung kann man diese Wirbelverteilung durch eine Wirbelbelegung der Profilkontur und einer in geeigneter Weise definierten Strahlmittellinie sowie eine Senkenbelegung der letzteren ersetzen. Diese Belegungen sind so festzulegen, daß sie auf die Außenströmung näherungsweise die gleiche Wirkung ausüben wie die tatsächlich vorhandene Wirbelverteilung.

Bei dem geschilderten Verfahren werden die Vereinfachungen der linearisierten Theorie dünner Tragflügelprofile nur am Strahl und für das Skelett beim idealen Anstellwinkel α_{id} (stoßfreier Eintritt) eingeführt. Für das komplexe Potential der Profilmströmung wird dabei ein Reihenansatz benutzt, der von den bisher bekannten abweicht und insbesondere auch unmittelbar hinter der Profilhinterkante eine endliche Krümmung des Strahles liefert. Um ihn allgemein formulieren zu können, wird das Profil (ζ -Ebene) auf das Skelett (z -Ebene, $z = x + i y$) abgebildet, wobei die Profilhinterkante bei $z = i \alpha_{id}$ und die Profilhinterkante bei $z = 1$ liegen soll. Diese Abbildung wird näherungsweise durch das komplexe Potential der symmetrischen Umströmung des Tropfens vermittelt. Ist dabei $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} (dz/d\zeta) = 1/l$, so kann man am Nachlauf mit hinreichender Genauigkeit $|dz/d\zeta| = 1/l$ setzen.

Der Ansatz für das komplexe Potential setzt sich aus dem zur reellen Achse antisymmetrischen Anteil $F(z)$ und dem symmetrischen Anteil $G(z)$ zusammen, die die Form

$$F(z) = \frac{1}{\pi} l U_{\infty} F_s(z) + \frac{1}{\pi} l (\alpha_{id} U_{\infty} - \dot{V}_{\infty}) F_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n F_n(z)$$

$$G(z) = l U_{\infty} z + \sum_{n=1}^{\infty} B_n G_n(z)$$

besitzen. U_{∞} und V_{∞} sind die Komponenten der Anströmgeschwindigkeit in der ζ -Ebene. Die Potentiale $F_n(z)$ und $G_n(z)$ sind auf der reellen Achse zwischen $z = 0$ und $z = 1$ reell und die entsprechenden Strömungen besitzen für $x > 1$ stetige Wirbel- bzw. Senkenbelegungen:

$$F_0(z) = (z - 1) \log \frac{1 + \sqrt{z}}{1 - \sqrt{z}} - 2\sqrt{z}$$

$$F'_0(z) = \log \frac{1 + \sqrt{z}}{1 - \sqrt{z}} - \frac{2}{\sqrt{z}}$$

$$F_1(z) = \begin{cases} 4\sqrt{z} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{(2k-1)^2} & \text{für } |z| \leq 1 \\ -4\sqrt{z} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{-k}}{(2k-1)^2} + \pi^2 + i\pi \log z & \text{für } |z| \geq 1 \end{cases}$$

$$F'_1(z) = \frac{1}{z} \log \frac{1 + \sqrt{z}}{1 - \sqrt{z}}$$

$$F_n(z) = \frac{1}{(n-1)z^{n-1}} \left[(z^{n-1} - 1) \log \frac{1 + \sqrt{z}}{1 - \sqrt{z}} + \frac{2}{\sqrt{z}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{z^k}{2k-1} \right] \quad \text{für } n \geq 2$$

$$F'_n(z) = \frac{1}{z^n} \left[\log \frac{1 + \sqrt{z}}{1 - \sqrt{z}} - \frac{2}{\sqrt{z}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{z^k}{2k-1} \right] \quad \text{für } n \geq 2$$

$$G_1(z) = \frac{z-1}{z} \log(1-z)$$

$$G'_1(z) = \frac{1}{z^2} \log(1-z) + \frac{1}{z}$$

$$G_n(z) = \frac{z-1}{z^n} \log(1-z) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{z-1}{k z^{n-k}} \quad \text{für } n \geq 2$$

$$G'_n(z) = \left(\frac{n}{z^{n+1}} - \frac{n-1}{z^n} \right) \log(1-z) - (n-1) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k z^{n-k}} + n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k z^{n-k+1}} \quad \text{für } n \geq 2.$$

$F_s(z)$ ist das Zusatzpotential für die Umströmung des Profilskeletts beim idealen Anstellwinkel. Es ist auf der reellen Achse für $x > 1$ reell, so daß dort keine Normalkomponente der Geschwindigkeit, sondern eine Wirbelbelegung auftritt. Ist das Skelett in der z -Ebene beim geometrischen Anstellwinkel null durch ein Polynom

$$y = \sum_{n=1}^m a_n (1-x^n)$$

gegeben, so ist

$$F_s(z) = \alpha_{id} F_{s1}(z) + \sum_{n=1}^m a_n F_{sn}(z)$$

mit

$$\alpha_{id} = - \sum_{n=1}^m \frac{n a_n}{2n-1}$$

$$F_{sn}(z) = (1-z^n) \log \frac{\sqrt{z+1}}{\sqrt{z-1}} + 2\sqrt{z} \sum_{k=1}^n \frac{z^{n-k}}{2k-1}$$

$$F'_{sn}(z) = -n z^{n-1} \log \frac{\sqrt{z+1}}{\sqrt{z-1}} + \frac{2n}{\sqrt{z}} \sum_{k=1}^n \frac{z^{n-k}}{2k-1}.$$

Die Koeffizienten A_n des Ansatzes sind so zu bestimmen, daß zwischen der Wirbelbelegung γ und der Normalkomponente V der Geschwindigkeit am Strahl eine Beziehung der Form

$$\gamma(x) - \frac{1}{l} c(x) \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

erfüllt wird, was bei der notwendigen Beschränkung auf endlich viele Koeffizienten nur näherungsweise möglich ist. Drückt man γ und V durch das Potential F an der oberen Berandung der reellen Achse aus, so ergibt sich

$$2 \operatorname{Re} F'(x) + \frac{1}{l} c(x) \operatorname{Im} F''(\gamma) = 0.$$

Da es für die Profilumströmung vor allem auf das Verhalten des Strahles dicht hinter dem Profil ankommt, wird gefordert, daß die linke Seite der vorstehenden Gleichung im Intervall $1 < x < \infty$ orthogonal zu den Funktionen $x^{-\nu}$; $\nu = 0, \dots, M-2$ wird, wenn M Koeffizienten berechnet werden sollen. Sie besitzt dann dort mindestens $M-1$ Nullstellen. Mit den verhältnismäßig einfach zu berechnenden Integralen

$$E_{\nu n} = -\frac{1}{l} \int_1^{\infty} \frac{c(x)}{x^{\nu}} \operatorname{Im} F'_n(x) dx, \quad F_{\nu n} = 2 \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\nu}} \operatorname{Re} F'_n(x) dx, \quad S_{\nu n} = 2 \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\nu}} F'_{sn}(x) dx$$

erhält man so die Gleichungen

$$\frac{\pi}{l} \sum_{n=1}^M (F_{\nu n} - E_{\nu n}) A_n = (V_{\infty} - \alpha_{id} U_{\infty}) F_{\nu 0} - U_{\infty} \sum_{n=1}^m S_{\nu n} a_n - U_{\infty} S_{\nu 1} \alpha_{id} \quad (\nu = 0, \dots, M-2).$$

Hinzu tritt die Bedingung, daß der Strahl am Austritt einen vorgeschriebenen Winkel τ mit der Profilschneide bilden soll, woraus die Gleichung

$$\frac{\pi}{l} \sum_{n=1}^M A_n = V_{\infty} + \tau U_{\infty}$$

folgt.

Die Koeffizienten B_n des symmetrischen Anteils $G(z)$, der die Senkenbelegung des Strahls enthält, ergeben sich ebenso wie die Funktion $c(x)$, die den Impulsfluß im Strahl darstellt und deren Ableitung der Senkenbelegung proportional ist, aus den Gesetzen der Strahlvermischung. Wird $c(x)$ in die Form

$$c(x) = l \sum_{k=0}^P \frac{c_k}{x^k}$$

gebracht, so ist

$$B_n = \frac{l U_\infty}{2 \pi} \sum_{k=n}^P c_k.$$

Literatur

- [1] H. B. HELMBOLD, Ing. Arch. **23** (1955), S. 209—121.
- [2] L. C. WOODS, ARC CP No. 388 (1958).
- [3] D. A. SPENCE, Journ. Aeron. Sci. **23** (1956), S. 92—94.
- [4] D. KÜCHEMANN, ARC R & M 3036, Mai 1956.
- [5] H.-J. MASCHECK, Wiss. Zs. TH Dresden **6** (1956/57), S. 1201—1210.
- [6] W. JACOBS, ZFW **5** (1957), S. 253—259.
- [7] N. N. PATRAULEA, Studii și Cercetări de Mecanică Aplicată **9** (1958), S. 13—42.
- [8] W. PROSNAK, Nadbitka archiwum mechaniki stosowanej **10** (1958), S. 3—24.

Anschrift: Dr.-Ing. H.-J. MASCHECK, Dresden A 20, Reickerstr. 39

Über dreidimensionale Grenzschichten an Ringflügeln

Von KARL NICKEL

Die Komponenten der Potentialgeschwindigkeit eines inkompressiblen Mediums bei stationärer Strömung um einen Ringflügel lauten nach J. WEISSINGER auf der Flügeloberfläche bei Linearisierung nach dem Anstellwinkel α :

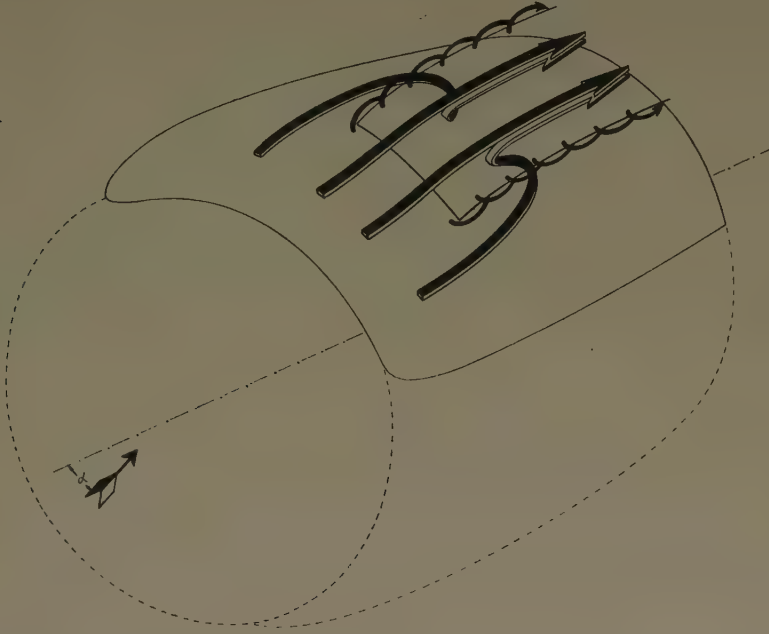
$$\left. \begin{aligned} U(x, \varphi) &= U_0(x) + \alpha U_1(x) \cos \varphi, \\ V(x, \varphi) &= \alpha V_1(x) \sin \varphi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1).$$

Darin ist x die Bogenlänge in meridionaler Richtung, φ der Azimutwinkel, U bzw. V sind die Geschwindigkeits-Komponenten in x - bzw. φ -Richtung. Damit liegt es nahe, für die Strömungsgeschwindigkeiten innerhalb der Grenzschicht einen Ansatz

$$\left. \begin{aligned} u(x, \varphi, z) &= u_0(x, z) + \alpha u_1(x, z) \cos \varphi, \\ v(x, \varphi, z) &= \alpha v_1(x, z) \sin \varphi, \\ w(x, \varphi, z) &= w_0(x, z) + \alpha w_1(x, z) \cos \varphi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

zu machen, wobei z der Abstand von der Ringflügel-Oberfläche ist und u, v, w die Geschwindigkeits-Komponenten in x, φ, z -Richtung darstellen. Die Haftbedingung an der Ringflügel-Oberfläche lautet für $z = 0$: $u_0 = u_1 = v_1 = w_0 = w_1 = 0$, die Bedingung des asymptotischen Übergangs in die Außenströmung ist für $z \rightarrow \infty$: $u_0 \rightarrow U_0$, $u_1 \rightarrow U_1$, $v_1 \rightarrow V_1$. Setzt man (2) in die Gleichungen einer laminaren Grenzschicht ein, dann zerfällt dieses System aus drei gekoppelten partiellen Differentialgleichungen in zwei Systeme für u_0 und w_0 sowie für u_1 und w_1 , sowie eine einzige Gleichung für v_1 , die jeweils untereinander entkoppelt und bis auf das erste System linear sind. Es ist dann möglich, daraus zunächst u_0 und w_0 zu bestimmen, damit v_1 zu berechnen und zum Schluß u_1 und w_1 zu ermitteln. Man kann zwar nicht erwarten, daß durch (2) die Grenzschichtdifferentialgleichungen exakt erfüllbar sind, doch dürfte (2) — da es sich dabei um eine Linearisierung nach α handelt — wenigstens für kleine Anstellwinkel α eine gute Annäherung an die wirkliche Geschwindigkeitsverteilung sein. Die Vorteile des Ansatzes (2) liegen darin, daß einerseits die entkoppelten Gleichungen einfacher zu lösen sind und daß andererseits nach Bestimmung der Funktionen u_0, u_1, v_1, w_0, w_1 die Geschwindigkeitskomponenten u, v, w schon für alle Anstellwinkel α und für alle Azimutwinkel φ ermittelt sind. Als Nachteil ist die Ungenauigkeit bei größeren Anstellwinkeln α zu nennen sowie die Tatsache, daß v_1, u_1 und w_1 von u_0 und w_0 abhängen und also auch nur dort berechnet werden können, wo u_0 und w_0 definiert sind. Dies führt zu Schwierigkeiten in der Nähe der Ablöselinie.

Beispielrechnungen nach einem v. KÁRMÁN-POHLHAUSEN-Verfahren ergaben befriedigende Übereinstimmung mit einem genaueren Verfahren, selbst noch bei $\alpha = 20^\circ$. Beim Vergleich mit Versuchsergebnissen ergab sich eine Diskrepanz allein an der Saugseite der Ringflügel-Außenfläche, wo sich im Experiment zwei freie Wirbel ablösten und dort die durch die Ablösung herabgesetzte Zirkulation abführten, wodurch rückwirkend die potentialtheoretische Geschwindigkeitsverteilung abgeändert wurde. Es zeigte sich ein Bereich mit abgelöster Strömung, der von strom-



aufwärts her „belüftet“ wurde. Die entstehende Trennfläche wurde dabei durch die erwähnten beiden Wirbel nach beiden Seiten hin begrenzt (vgl. die obenstehende Skizze des Strömungsverlaufs). Die bisher übliche Definition eines abgelösten Bereichs bei dreidimensionalen Grenzschichten als „Gebiet, in das hinein keine Flüssigkeit von stromaufwärts her gelangt“, läßt sich daher nicht mehr aufrechterhalten, sobald freie Wirbel auf der Körperoberfläche enden.

Anschrift: Doz. Dr. KARL NICKEL, Karlsruhe, Brettenerstr. 9

Das Problem des senkrechten Stoßes an einer gekrümmten Wand

Von KLAUS OSWATITSCH und JÜRGEN ZIEREP *)

In Fortsetzung einer Arbeit des zweiten Verfassers [1] und in Verallgemeinerung einer Betrachtung von GADD [2] wird erneut das Problem des senkrechten Stoßes an der gekrümmten Wand betrachtet (Bild 1). Hierbei handelt es sich um die folgende Randwertaufgabe: Es ist die transsonische Differentialgleichung (Φ = Potential)

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = \Phi_x \Phi_{xx} \dots \dots \dots (1)$$

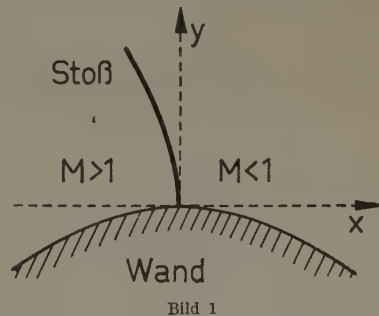
zu lösen in dem Unterschallbereich, der vom Stoß und von der Wand begrenzt wird. Diese Lösung muß an der Wand die vorgeschriebenen Randwerte (tangenciales Abströmen) und auf dem noch unbekannten Stoß die transsonische Stoßpolare

$$(\hat{V} - V)^2 = (U - \hat{U}) \left(\hat{U} - \frac{\hat{U}^2}{2} - U + \frac{U^2}{2} \right) \quad (2)$$

erfüllen.

Hierbei bezeichnen U, V die reduzierten Störgeschwindigkeitskomponenten in x, y -Richtung vor dem Stoß; \hat{U}, \hat{V} sind diejenigen hinter dem Stoß. U, V sind als bekannt anzusehen. Für die Stoßneigung gilt dann

$$\frac{dy}{dx} = \frac{U - \hat{U}}{\hat{V} - V} \dots \dots \dots (3).$$



*) Institut für theoretische Gasdynamik der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt e. V.

Zur Lösung von (1) wird der Ansatz

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi, r) = & f_{21}(\varphi) r^2 \ln r + f_{20}(\varphi) r^2 \\ & + f_{32}(\varphi) r^3 (\ln r)^2 + f_{31}(\varphi) r^3 \ln r + f_{30}(\varphi) r^3 \\ & + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

verwendet. Transformiert man (1) auf Polarkoordinaten, trägt (4) ein, so ergibt ein Koeffizientenvergleich für die $f_{ik}(\varphi)$ ein unendliches System von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, das rekursiv gelöst werden kann und mit dessen Lösung man die vorgeschriebenen Randwerte an der Wand erfüllen kann. Nun wird für die Stoßkurve ein dem Ansatz (4) entsprechender Ansatz mit freien Parametern s_{ik} gemacht

$$\varphi_s(r) = \frac{\pi}{2} + s_{11} r \ln r + s_{10} r + s_{22} r^2 (\ln r)^2 + s_{21} r^2 \ln r + s_{20} r^2 + \dots \quad (5)$$

(5) wird in (3) eingetragen und liefert mit (2) eine Darstellung für \hat{U} und \hat{V} auf dem Stoß. Diese hat man nun mit den durch Ableitungen von (4) entstehenden Darstellungen für \hat{U} und \hat{V} zu vergleichen, nachdem man die $f_{ik}(\varphi)$ bestimmt und daselbst eingetragen hat und φ_s durch (5) ersetzt. Ein Koeffizientenvergleich ergibt folgendes Lösungssystem, wenn wir die Randbedingung in der Form $\hat{V}(0, r) = -b r$ mit $b = \text{konst}$ vorschreiben und für U, V die Darstellung $U = 2 - b y$, $V = -b x$ benutzen:

$$\left. \begin{aligned} s_{11} &= -\frac{b}{\pi}, \quad s_{10} = \text{beliebig}, \quad s_{22} = 0, \quad s_{21} = -\frac{5b^2}{6\pi^2}, \\ s_{20} &= -\frac{5b^2}{18\pi^2} + \frac{5b^2}{4\pi} - \frac{13}{24} b s_{10}, \dots \\ f_{21}(\varphi) &= -\frac{2b}{\pi} \cos 2\varphi, \\ f_{20}(\varphi) &= \frac{2b}{\pi} \varphi \sin 2\varphi + 2s_{10} \cos 2\varphi - \frac{b}{2} \sin 2\varphi, \\ f_{32}(\varphi) &= -\frac{10b^2}{3\pi^2} \cos 3\varphi + \frac{2b^2}{\pi^2} \cos \varphi, \\ f_{31}(\varphi) &= -\frac{2b^2}{\pi^2} \varphi \sin \varphi + \frac{b^2}{2\pi} \sin \varphi - \frac{b^2}{2\pi} \left(2s_{10} - \frac{3b}{\pi} \right) \cos \varphi \\ &\quad + \frac{b}{6\pi} \left(-\frac{21b}{\pi} + 46s_{10} \right) \cos 3\varphi - \frac{b^2}{6\pi} \sin 3\varphi \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \dots \quad (6)$$

Hierbei bleibt ein Parameter (s_{10}) frei, der zur Anpassung an der Außenströmung benutzt werden kann. Aus (5) mit (6) folgt nach kurzer Rechnung für die Stoßform die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} x = r \cos \varphi_s(r) &= \frac{b}{\pi} r^2 \ln r - s_{10} r^2 + \frac{5b^2}{6\pi^2} r^3 \ln r + \left(\frac{5b^2}{18\pi^2} - \frac{5b^2}{4\pi} + \frac{13}{24} b s_{10} \right) r^3 + \dots \\ y = r \sin \varphi_s(r) &= r - \frac{1}{2} \frac{b^2}{\pi^2} r^3 (\ln r)^2 + \frac{b}{\pi} s_{10} r^3 \ln r - \frac{s_{10}^2}{2} r^3 + \dots \end{aligned} \quad (8)$$



Bild 2

Hieraus ist zu entnehmen, daß die Stoßkurve in Wandnähe stromaufwärts oder stromabwärts weist, je nachdem, ob ein konvexes ($b > 0$) oder ein konkaves Profil ($b < 0$) vorliegt (Bild 2). Hinter dem Stoß ergibt sich ein unendlicher Geschwindig-

keitsgradient, der als Beschleunigung ($b > 0$) oder als Verzögerung ($b < 0$) wirkt. (Ausführliche Veröffentlichung demnächst in der ZAMP).

Literatur

- [1] J. ZIEREP, ZAMP 9b (1958), S. 764 und 10 (1959), S. 429.
[2] G. E. GADD, ZAMP 11 (1960), S. 51.

Anschriften: Prof. Dr. K. OSWATITSCH, Doz. Dr. J. ZIEREP, Aachen, Theaterstraße 13

Über den Einfluß eines aus der Hinterkante ausfließenden Strahls auf die aerodynamischen Eigenschaften dünner Flügelprofile^{*)}

Von SVETOPOLK PIVKO

Ein einfaches, halbempirisches Lösungsverfahren für die angenäherte Ermittlung des Auftriebs und Längsmomentes eines Flügelprofils unter der Wirkung eines Flüssigkeitsstrahles, der aus der Profilhinterkante ausströmt, wird angegeben.

Ein dünnes Flügelprofil, dessen Sehne an der X-Achse liegt und das unter kleinem Anstellwinkel α mit konstanter Geschwindigkeit V_0 angeströmt wird, und ein dünner Flüssigkeitsstrahl der Dichte ϱ , der durch einen kleinen Spalt von der Breite δ_1 mit der Geschwindigkeit V_1 unter dem Winkel τ aus der Profilhinterkante ausfließt, werden betrachtet.

Es wird angenommen, daß sich die resultierende aerodynamische Wirkung des Strahls auf das Flügelprofil bei kleinen Anströmwinkeln α und τ nicht wesentlich von der Wirkung einer der X-Achse aufgelegten linearen Wirbelverteilung unterscheidet. Die Wirbelstärke $V_0 g(x)$ an der Entfernung x hinter der Profilnase kann als proportional zur Differenz der örtlichen Geschwindigkeiten im Strahl und außerhalb des Strahls angesehen werden, wobei der Proportionalitätsfaktor als $k \approx \alpha + \tau$ angenommen werden kann.

Unter einer solchen vereinfachenden Annahme wird sich die Größe $g(x)$ linear mit der Entfernung von der Austrittsöffnung ändern. Auf Grund der Versuchsergebnisse kann $g(x)$ als eine nur von den Parametern λ und c_J abhängige Größe betrachtet werden. Dabei sind $\lambda = V_0/V_1$ das Geschwindigkeitsverhältnis und $c_J = 2 \varrho \delta_1 V_1^2/\varrho_0 l V_0^2$ der Strahlstärkekoeffizient, mit der Dichte ϱ_0 der äußeren Luft und der Profiltiefe l .

Wenn man annimmt, daß die Grundströmung um das Flügelprofil die Geschwindigkeitsverteilung im Strahl nicht ändert, dann lassen sich die in beliebigen Profilpunkten durch die lineare Wirbelverteilung $V_0 g(x)$ hervorgerufenen Störgeschwindigkeiten w_J berechnen.

Ein dünnes Flügelprofil wird ebenso in üblicher Weise durch eine Wirbelverteilung von Stärke $V_0 f(x)$, die in verschiedenen Profilpunkten die Störgeschwindigkeiten w bewirkt, ersetzt. Wenn man die unbekannte Größe $f(x)$ in der Form einer FOURIERSchen Reihe als Funktion der Winkelkoordinate θ und der Konstanten A_0 und A_n ausdrückt, dann lassen sich A_0 und A_n mit Hilfe der Profilmströmbedingung

$$\alpha + \frac{w}{V_0} + \frac{w_J}{V_0} = 0$$

aus den Integralen

$$A_0 - \alpha = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{w_J}{V_0} d\theta = k c_0$$

und

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{w_J}{V_0} \cos n \theta d\theta = k c_n$$

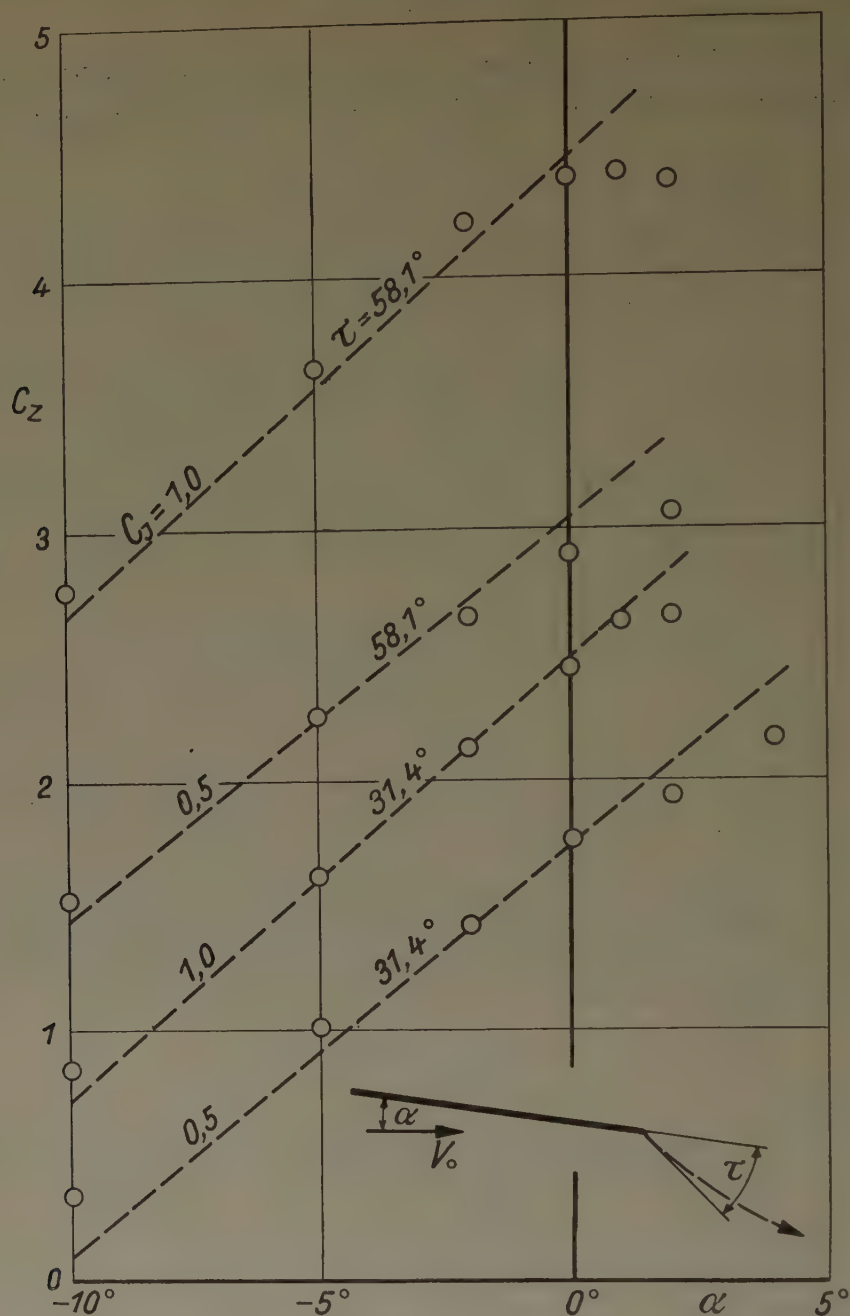
ermitteln. Für kleine Winkel α und τ erhält man für die Beiwerte für Gesamtauftrieb und Längsmoment um die Profilnase

$$c_z = 2\pi\alpha + \left[2\pi \left(c_0 + \frac{1}{2} c_1 \right) + c_J \right] (\alpha + \tau),$$

$$c_m = -\frac{\pi}{2} \alpha - \frac{\pi}{2} \left(c_0 + c_1 - \frac{1}{2} c_2 \right) (\alpha + \tau) - \tau c_J.$$

Die mit Hilfe eines solchen halbempirischen Verfahrens berechneten Werte des Gesamtauftriebsbeiwerts c_z , bei verschiedenen Anstellwinkeln, werden im Bild mit dem Ergebnis der im Luftkanal an einem 12,5% dicken Flügelprofil erhaltenen Messungen [1,2] verglichen. Man sieht, daß die berechneten Geraden nur wenig von den experimentell gemessenen Punkten abweichen.

^{*)} Der angekündigte Vortrag konnte auf der Tagung nicht gehalten werden.



Literatur

- [1] N. A. DIMMOCK, An Experimental Introduction to the Jet Flap. ARC, Current Papers CP 344, London 1957.
 [2] N. A. DIMMOCK, Some Further Jet Flap Experiments. ARC, Current Papers CP 345, London 1957.

Anschrift: Prof. Dr.-Ing. SVETOPOLK PIVKO, Borisa Kidriča 44, Beograd, Jugoslavien

Zur Berechnung der Potentialströmung für Schaufelgitter mit stark gewölbten dünnen Profilen^{*)}

VON JAN POLÁŠEK

Es soll ein einfaches Verfahren zur Berechnung der potentialen inkompressiblen Strömung durch das ebene Schaufelgitter mit stark gewölbten dünnen Profilen beschrieben werden. Das Verfahren ist sowohl zur ersten als auch zur zweiten Hauptaufgabe geeignet und schließt alle brauchbaren Werte der Teilungsverhältnisse t/l , Staffelungswinkel λ und Wölbungen ω ein (s. Bild).

^{*)} Staatliches Forschungsinstitut für Wärmetechnik, Praha.

In diesem Verfahren sind die Gitterprofile, ebenso wie in der BIRNBAUM-GLAUERTSchen Einzeltragflügeltheorie, durch eine kontinuierliche Wirbelverteilung ersetzt. Die Umströmung eines Gitterprofils wird als Umströmung eines Profils in inhomogener primärer Strömung betrachtet, die Inhomogenität der Primärströmung (induzierte Geschwindigkeit) wird durch die übrigen Gitterprofile bewirkt. Diese Betrachtungsweise gestattet, die Ergebnisse einer früheren Arbeit über den dünnen Tragflügel im inhomogenen Strömungsfeld [1] zu benützen; der einzige Unterschied liegt darin, daß das primäre Feld nicht im voraus gegeben ist, sondern von den gesuchten Größen abhängen mag.

Zu Berechnungszwecken werden die Polarkoordinaten (r, φ) (Bild) eingeführt, in denen das Profil durch die Gleichung

$$r(\varphi) = R[1 + \eta(\varphi)], \quad \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\omega}{2} \quad (1)$$

gegeben ist. Dabei sind

$$\eta\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}\right) = \eta\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\omega}{2}\right) = 0 \quad \dots (2).$$

R kommt darin dem Halbmesser der die Profile approximierenden Kreisbögen gleich; diese werden so gewählt, daß die Abweichungen der Profile von diesen Kreisbögen als gering angesehen werden können. Die Wirbel werden auf dem Grundprofil verteilt (bei übrigen Gitterprofilen wird die Wirbelverteilung auf den approximierenden Kreisbögen vorgenommen).

Durch Einführung der neuen Veränderlichen ϑ mit der folgenden Gleichung

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\omega}{2} \cos \vartheta, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi \quad \dots (3),$$

und des GLAUERTSchen Ansatzes für die Wirbelverteilung

$$\gamma(\vartheta) = 2U_\infty \left(g_0 \cotg \frac{1}{2} \vartheta + g_1 \sin \vartheta + g_2 \sin 2\vartheta + \dots \right) \quad \dots (4),$$

sowie durch Einführung ähnlicher trigonometrischer Ansätze für die Profilform und die Komponenten der primären Geschwindigkeit

$$-\frac{d\eta}{d\varphi} = B_0 + B_1 \cos \vartheta + B_2 \cos 2\vartheta + \dots \quad \dots (5),$$

$$\frac{V_x}{U_\infty} = 1 + \mu_0 + \mu_1 \cos \vartheta + \mu_2 \cos 2\vartheta + \dots \quad \dots (6),$$

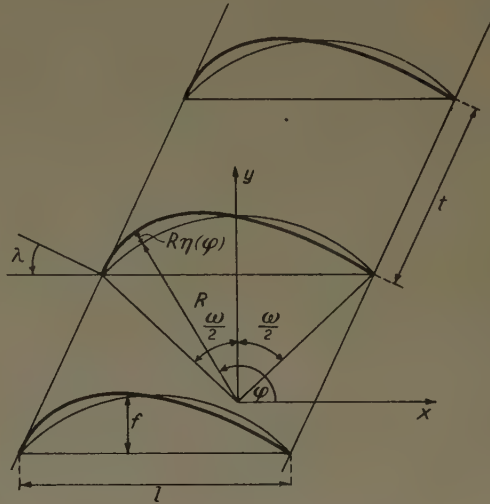
$$\frac{V_y}{U_\infty} = \nu_0 + \nu_1 \cos \vartheta + \nu_2 \cos 2\vartheta + \dots \quad \dots (7),$$

wird die sich aus der kinematischen Bedingung der Umströmung ergebende Integralgleichung auf ein unendliches Gleichungssystem zurückgeführt. Je nach dem, ob es sich um die Lösung der ersten oder zweiten Hauptaufgabe handelt, werden entweder die Koeffizienten B_n oder g_n als unbekannt angesehen.

In der ersten Näherung (g_n , B_n , μ_n , ν_n und ω werden in diesem Falle als klein vorausgesetzt) hat dieses Gleichungssystem die Form

$$\left. \begin{aligned} g_0 &= -B_0 + \nu_0, \\ g_n &= B_n - \nu_n, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad \dots (8).$$

Daraus folgt, daß man die Lösung der beiden Hauptaufgaben mit schrittweisen Näherungen durchführen kann. Werden dem System (8) die Glieder, die in einem normalen Falle noch zu



erwägen sind, beigelegt, ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \left(1 + \frac{\omega}{12} B_1 - \frac{\omega^2}{96}\right) g_0 &= -\frac{\omega}{24} B_2 g_1 + \frac{\omega^2}{192} g_2 - B_0 + v_0 - \frac{1}{2} B_1 \mu_1 - B_2 \left(\frac{1}{3} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_2\right) \\
 &\quad + \frac{\omega}{8} \left[B_1 \left(v_0 - \frac{1}{2} v_2\right) + \frac{1}{3} B_2 v_1 \right], \\
 \left(1 - \frac{\omega}{8} B_1 - \frac{\omega^2}{96}\right) g_1 &= \left(\frac{\omega}{4} B_1 + \frac{\omega^2}{48}\right) g_0 + B_1 - v_1 + B_1 \left(\mu_0 + \frac{1}{2} \mu_2\right) \\
 &\quad + \frac{5}{6} B_2 \mu_1 - \frac{\omega}{8} \left[\frac{1}{2} B_1 v_1 + \frac{3}{2} B_2 v_0 \right], \\
 g_2 &= \frac{\omega}{4} B_2 \left(g_0 + \frac{1}{2} g_1\right) + B_2 - v_2 + \frac{1}{2} B_1 \mu_1 + B_2 \left(\mu_0 + \frac{1}{3} \mu_2\right) \\
 &\quad + \frac{\omega}{8} B_1 [v_0 - v_2], \\
 g_3 &= B_3 - v_3 + \frac{1}{2} (B_1 \mu_2 + B_2 \mu_1) + \frac{\omega}{8} \left[\frac{1}{2} B_1 v_1 + \frac{1}{3} B_2 v_0 \right], \\
 g_4 &= B_4 - v_4 + \frac{1}{2} B_2 \mu_2 + \frac{\omega}{8} \left[\frac{1}{2} B_1 v_2 + \frac{1}{3} B_2 v_1 \right], \\
 g_5 &= B_5 - v_5 + \frac{\omega}{24} B_2 v_2, \\
 g_6 &= B_6 - v_6, \\
 &\dots
 \end{aligned} \quad (9)$$

Die Koeffizienten μ_n und v_n sind im Falle der Gitterberechnung lineare Funktionen von g_n . Für einen bequemeren Gebrauch werden die Zahlentafeln der in diesen linearen Funktionen vorkommenden Beiwerte ein für allemal in der Abhängigkeit von Teilungsverhältnis t/l , Staffelnwinkel λ und Wölbung ω berechnet.

Literatur

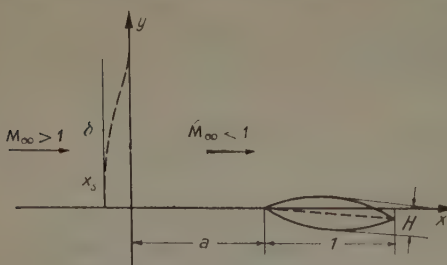
- [1] J. POLÁŠEK, Tenký profil v nehomogenním proudovém poli (Dünnes Profil im inhomogenen Strömungsfeld), Aplikace matematiky 1 (1956), Nr. 1—2.

Anschrift: Dr. JAN POLÁŠEK, Prag 1, Husova 8, ČSSR

Der Einfluß ebener und rotationssymmetrischer Körper auf stromaufwärts liegende senkrechte Stöße

Von D. RUES*)

Unter der Voraussetzung kleiner Störungen wird der Einfluß von ebenen und rotationssymmetrischen Körpern auf senkrechte stationäre Stöße untersucht, wenn sich die Körper hinter den Stößen befinden.



Skizze der Lage von Stoß und Körper
 a = Abstand Körper — ungestörter Stoß,
 x_0 = gestörter Stoßlage,
 δ = Neigung des gestörten Stöße

Wir nehmen an, daß ein unendlich ausgedehnter senkrechter Stoß vorliegen würde, wenn er vom Körper ungestört wäre, und wählen unser Koordinatensystem so, daß die y -Achse im ungestörten Stoß liegt.

Die Längen werden mit der Profillänge und die Geschwindigkeiten mit der Anströmgeschwindigkeit u_∞ vor dem Stoß dimensionslos gemacht.

Da sich die Entropie hinter dem Stoß erst quadratisch mit der Neigung des gestörten Stöße ändert, wird das Strömungsfeld hinter dem Stoß durch die Potentialgleichung beherrscht. Die Randbedingungen werden von der Profilbedingung und der linearisierten Stoßgleichung:

$$\varphi_x(0, y) = 0 \quad \dots \quad (1)$$

geliefert. Die zweite Bedingung der Stoßgleichungen:

$$\varphi_y(0, y) = \frac{M^{*2} - 1}{M^{*2}} \frac{dx_s}{dy} \quad \dots \quad (2)$$

bestimmt die Größe der Stoßverschiebung x_s .

*) Institut für Theoretische Gasdynamik der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt e. V., Aachen.

Für den rotationssymmetrischen Körper¹⁾ erhält man so z. B. für die Stoßverschiebung:

$$x_s = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{M^{*2} - 1} \int_a^{1+a} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \beta^2 r^2}} + \frac{2\beta}{\pi} \int_0^1 r k \xi K(k) \left[\frac{1}{[\xi^2 + \beta^2 r^2 k^2]^{3/2}} + \frac{1}{[\xi^2 k^2 + \beta^2 r^2]^{3/2}} \right] dk \right\} \frac{dQ}{d\xi} d\xi \dots \dots \dots (3).$$

Dabei ist $\beta^2 = 1 - \hat{M}^2$, $Q(x)$ die Querschnittsverteilung des Körpers und $K(k)$ das vollständige elliptische Integral erster Gattung. Für die maximale Stoßverschiebung auf der Achse vereinfacht sich Gl. (3) erheblich, und man erhält:

$$x_{s \max} = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{M^{*2} - 1} \int_a^{1+a} \frac{1}{\xi} \frac{dQ}{d\xi} d\xi \dots \dots \dots (4).$$

Im ebenen Fall läßt sich für symmetrische, geschlossene Profile, die sich in einiger Entfernung vom Stoß befinden, eine Näherungsmethode angeben, indem man das Profil durch einen Dipol nähert.

Eine anschauliche Darstellung des Strömungsfeldes hinter dem Stoß erhält man mit Hilfe der Spiegelungsmethode. Um die Randbedingung (1) zu erfüllen, muß das Profil an der x - und y -Achse gespiegelt werden. Dieses gespiegelte Profil ergibt nun im Bereich des Körpers eine Geschwindigkeitsverteilung, die den Einfluß des Stoßes auf den ausgelenkten Körper darstellt. Man erhält so z. B. im ebenen Fall für die angestellte Platte eine Auftriebserhöhung durch die Stoßauslenkung.

Anschrift: Dipl.-Phys. D. RUES, Aachen, Lothringer Str. 97

¹⁾ Für den ebenen Fall, siehe: RUES, ZfW 8 (1960), S. 3.

Die Berechnung der Grenzlinien ebener transonischer Profilströmungen

Von E. SCHINCKE

Die grundlegenden Eigenschaften von Grenzlinien für stationäre ebene Strömungen eines isentropischen Gases sind von W. TOLLMIEEN [1], [2] angegeben und später von J. W. CRAGGS [3] ergänzt worden. Beide Autoren betrachten Grenzlinien als Singularitäten der Abbildung des Strömungsgebietes auf ein Gebiet der Hodographenebene, während H. GEIRINGER [4] bei ihren Untersuchungen an Stelle der Hodographenebene die Ebene mit den rechtwinkligen charakteristischen Koordinaten benutzt. Nach diesen Verfahren sind Grenzlinien für einzelne elementare Strömungsbeispiele numerisch berechnet worden. Im allgemeinen Fall — etwa bei der Umströmung einer geschlossenen Profilkontur — ist ein erheblicher Rechenaufwand erforderlich, der sich jedoch vermindern läßt, wenn man berücksichtigt, daß das Potential längs der Stromlinien eine Funktion des Stromwinkels allein bildet, deren Extrema mit den Punkten der Hodographenbilder von Grenzlinien zusammenfallen.

Wenn vorausgesetzt wird, daß im Strömungsgebiet der xy -Ebene weder Quellen noch Wirbel vorhanden sind, dann bestehen zwischen dem Potential $\Phi(x, y)$ und der Stromfunktion $\Psi(x, y)$ die Beziehungen

$$\Phi_x = \frac{\varrho_r}{\varrho} \Psi_y \quad \Phi_y = -\frac{\varrho_r}{\varrho} \Psi_x \dots \dots \dots (1),$$

wobei ϱ_r den Ruhewert der Dichte ϱ bezeichnet. Mit

$$w^2 = \Phi_x^2 + \Phi_y^2 \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \vartheta = \frac{\Phi_y}{\Phi_x} \dots \dots \dots (2)$$

ergeben sich der Geschwindigkeitsbetrag w und der Stromwinkel ϑ . Liegt eine Druck-Dichte-Beziehung $p(\varrho)$ vor, etwa in Form der Poissonschen Adiabate oder einer geeigneten Approximation

dieser Kurve, dann ist die Schallgeschwindigkeit a durch $a^2 = \frac{dp}{d\rho}$ erklärt, und w ist mit p durch die BERNOULLISCHE Gleichung $w dw + \frac{dp}{\rho} = 0$ verknüpft. Definiert man eine Funktion $\omega(w)$ gemäß

$$\omega(w) = a^* \exp \int_{a^*}^w \frac{\rho_r}{\rho} \frac{dw}{w} \quad (a^* \text{ kritische Geschwindigkeit}) \quad (3)$$

und führt ω, ϑ als Polarkoordinaten der Hodographenebene ein, so geht das Gleichungssystem (1) in

$$\Phi_\omega = -\frac{K(\omega)}{\omega} \Psi_\vartheta, \quad \Phi_\vartheta = \omega \Psi_\omega \quad (4)$$

über, wobei zur Abkürzung

$$K(\omega) = \left(\frac{\rho_r}{\rho(\omega)} \right)^2 \left(1 - \frac{w^2}{a^2}(\omega) \right) \quad (5)$$

gesetzt wurde. Schließlich liefert die Elimination von $\Phi(\omega, \vartheta)$ bzw. $\Psi(\omega, \vartheta)$ die beiden Differentialgleichungen

$$\Psi_{\omega\omega} + \frac{1}{\omega} \Psi_\omega + \frac{K}{\omega^2} \Psi_{\vartheta\vartheta} = 0, \quad \Phi_{\omega\omega} + \frac{K}{\omega} \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\omega}{K} \right) \Phi_\omega + \frac{K}{\omega^3} \Phi_{\vartheta\vartheta} = 0 \quad (6),$$

die im unterkritischen Gebiet $\omega < a^*$ wegen $K > 0$ von elliptischem und im überkritischen Gebiet $\omega > a^*$ wegen $K < 0$ von hyperbolischem Typ sind, ihre Charakteristiken C^+ und C^- ergeben sich aus

$$\frac{d\omega}{d\vartheta} = \frac{\omega}{i\sqrt{K}} \quad \text{und} \quad \frac{d\omega}{d\vartheta} = -\frac{\omega}{i\sqrt{K}} \quad (7).$$

Zwischen den Koordinaten x, y und ω, ϑ besteht auf Grund der TSCHAPLIGINSCHEN Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} dx &= \frac{\cos \vartheta}{w} d\Phi(\omega, \vartheta) - \frac{\rho_r}{\rho} \sin \vartheta d\Psi(\omega, \vartheta), \\ dy &= \frac{\sin \vartheta}{w} d\Phi(\omega, \vartheta) + \frac{\rho_r}{\rho} \cos \vartheta d\Psi(\omega, \vartheta) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

überall dort eine umkehrbar eindeutige Beziehung, wo die Funktionaldeterminante

$$I \equiv \frac{\partial(x, y)}{\partial(\omega, \vartheta)} \neq 0 \quad (9)$$

ist. Diejenigen Kurven $\omega = \omega(\vartheta)$, in denen (9) nicht gilt, heißen Grenzhodographen G' und ihre Bildkurven $x = x(y)$ bezeichnet man als Grenzlinien G . (Ausgeschlossen werden Bereiche der ω, ϑ -Ebene mit positivem Flächeninhalt, in denen $I = 0$ wird.) Wegen $I = E D$ mit

$$E \equiv \frac{\partial(x, y)}{\partial(\Phi, \Psi)} = \frac{\rho_r}{\rho} \frac{1}{w} \neq 0, \quad D \equiv \frac{\partial(\Phi, \Psi)}{\partial(\omega, \vartheta)} = -\left(\frac{\omega}{K} \Phi_\omega^2 + \frac{1}{\omega} \Phi_\vartheta^2 \right) \quad (10)$$

reduziert sich die Bedingung $I = 0$ auf $D = 0$. Beschränken wir uns hier auf solche Punkte, in denen $\Phi_\omega, \Phi_\vartheta$ nicht beide verschwinden, dann gilt $D = -D^+ D^-$ mit

$$D^+(\omega, \vartheta) = \frac{1}{i} \sqrt{\frac{\omega}{K}} \Phi_\omega + \frac{1}{\sqrt{\omega}} \Phi_\vartheta, \quad D^-(\omega, \vartheta) = -\frac{1}{i} \sqrt{\frac{\omega}{K}} \Phi_\omega + \frac{1}{\sqrt{\omega}} \Phi_\vartheta \quad (11)$$

und die Kurven G' sind durch

$$D^+ = 0 \quad \text{und} \quad D^- = 0 \quad (12)$$

charakterisiert. Jede Stromlinie S , definiert durch $\Psi_y + \Psi_x \frac{dx}{dy} = 0$, möge eine Krümmung $1/\Re(\vartheta)$ besitzen derart, daß eine Parameterdarstellung für S in der Form

$$x(\vartheta) = x_A + \int_{\vartheta_A}^{\vartheta} \Re(\vartheta) \cos \vartheta d\vartheta, \quad y(\vartheta) = y_A + \int_{\vartheta_A}^{\vartheta} \Re(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \quad (13)$$

existiert. Jede Bildkurve S' von S kann entweder durch

$$\Psi_\omega \frac{d\omega}{d\vartheta} + \Psi_\vartheta = 0 \quad \text{oder} \quad \Phi_\vartheta \frac{d\omega}{d\vartheta} - \frac{\omega^2}{K} \Phi_\omega = 0 \quad (14)$$

dargestellt werden. Auf Grund von (2) und (13) erhält man

$$\frac{d\Phi}{d\vartheta} = \Re(\vartheta) w(\vartheta) \quad \text{auf } S' \quad \dots \dots \dots (15)$$

und wegen

$$\frac{d\Phi}{d\vartheta} = \Phi_{\omega} \frac{d\omega}{d\vartheta} + \Phi_{\vartheta} \quad \text{auf } S' \quad \dots \dots \dots (16)$$

folgt bei Beachtung von (11) und (14) die in allen Punkten von S' gültige Beziehung

$$\frac{d\Phi}{d\vartheta} = D^+ D^- \Phi_{\vartheta}^{-1} \quad \dots \dots \dots (17).$$

Setzt man voraus, daß Φ_{ϑ} im betrachteten Strömungsbereich beschränkt bleibt, dann folgt aus (17) und (12), daß diejenigen Punkte (ω_A, ϑ_A) einer Stromlinie S' , in denen die längs S' erklärte Funktion $\Phi(\omega, \vartheta) = f(\vartheta)$ ein Extremum $\frac{d}{d\vartheta} f(\vartheta_A) \equiv \dot{f}(\vartheta_A) = 0$ besitzt, zugleich Punkte eines Grenzhodographen G' sind. Wegen (15) wird $\Re(\vartheta_A) = 0$ für $w(\vartheta_A) \neq 0$, und eine asymptotische Betrachtung mit Hilfe von (13) zeigt ferner, daß die Stromlinie S im Bildpunkt (x_A, y_A) eine Spitze aufweist, wenn $\ddot{f}(\vartheta_A) \neq 0$ ist. Diese Spitze liegt auf verschiedenen Seiten der Grenzlinie G , je nachdem ob $f(\vartheta)$ ein Maximum $\ddot{f}(\vartheta_A) < 0$ oder ein Minimum $\ddot{f}(\vartheta_A) > 0$ bildet. Liegt ein Wendepunkt $\dot{f}(\vartheta_A) = 0$, $\ddot{f}(\vartheta_A) \neq 0$ vor, dann berühren sich G' und S' in (ω_A, ϑ_A) , und im zugehörigen Bildpunkt (x_A, y_A) ergibt sich nach einem Satz von CRAGGS [3] eine Spitze der Grenzlinie G . Erwähnt sei noch, daß sich in den Punkten der Grenzhodographen $D^+ = 0$ bzw. $D^- = 0$ die Stromlinien S' und die Charakteristiken C^+ bzw. C^- berühren. Auf die Mitteilung weiterer Eigenschaften muß hier verzichtet werden.

Die numerische Brauchbarkeit des Verfahrens soll am Beispiel der in [5] angegebenen symmetrischen Profilströmung gezeigt werden. Dabei wurde eine $p(\varrho)$ -Beziehung zugrunde gelegt, für die $K(\omega) = 1 - \left(\frac{\omega}{a^*}\right)^2$ ist. Die Stromfunktion $\Psi(\omega, \vartheta)$ und das Potential $\Phi(\omega, \vartheta)$ haben die Gestalt

$$\left. \begin{aligned} \Psi(\omega, \vartheta) &= \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{1 - \frac{\omega}{a^*} \cos \theta} + i c \frac{\omega}{a^*} \sin \theta \right\}, \\ \Phi(\omega, \vartheta) &= -\frac{\omega}{a^*} \operatorname{Im} \left\{ \frac{\sin \theta}{1 - \frac{\omega}{a^*} \cos \theta} - i c \left(\frac{1}{2} \frac{\omega}{a^*} + \cos \theta \right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (18),$$

wobei die Konstante c durch die Anström-MACH-Zahl $\frac{w_0}{a^*}$ bestimmt, und die Funktion $\theta(\omega, \vartheta)$ durch

$$i \ln \sqrt{\frac{1-c}{1+c}} + \vartheta + \theta - \frac{\omega}{a^*} \sin \theta = 0 \quad \dots \dots \dots (19)$$

definiert ist. Für $0,381 < \frac{w_0}{a^*} \leq 0,436$ ergeben sich stetige Potentialströmungen um geschlossene Profile mit beschränkten Überschallbereichen. Die Grenzlinienberechnung wurde nur bei $\frac{w_0}{a^*} = 0,436$ durchgeführt.

In Bild 1 ist die Funktion $f(\vartheta)$ für die Stromlinien $\Psi = 0$; $-0,1$; $-0,2$ eingetragen; ihre Extrema wurden graphisch ermittelt. Bild 2 zeigt ein Blatt der zweifach überdeckten $\omega \vartheta$ -Ebene mit dem Grenzhodographen $D^+ = 0$; der Grenzhodograph $D^- = 0$ liegt symmetrisch zur Achse $\vartheta = 0$ im anderen Blatt. Die Grenzlinie in Bild 3 verläuft innerhalb der Profilkontur $\Psi(x, y) = 0$. Dem Punkt P entspricht der Wendepunkt P'' in Bild 1. Im Gebiet $P Q_1 Q_2$ ist die $x y$ -Ebene dreifach überdeckt. Für $\frac{w_0}{a^*} > 0,436$ würde P in das Innere des Strömungsgebietes $\Psi > 0$ rücken; derartige Potentialströmungen brechen aber nach TOLLMIEEN [2] bereits vor dem

Punkt P zusammen. Die Anström-MACH-Zahl $\frac{w_0}{a^*} = 0,436$ ist demnach eine obere Schranke der stetigen Potentialströmungen, die sich auf Grund der Stromfunktion (18) ergeben. Das beschriebene Verfahren läßt sich auch auf andere Hodographentransformationen anwenden.

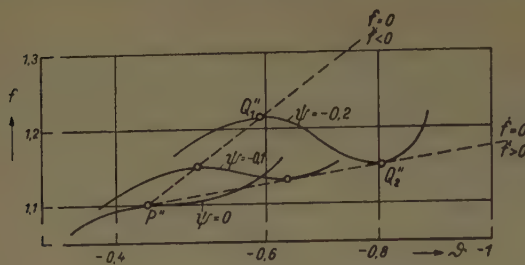


Bild 1

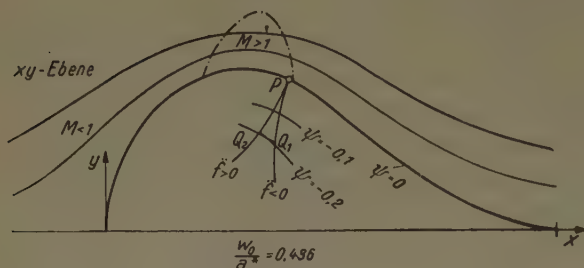


Bild 3

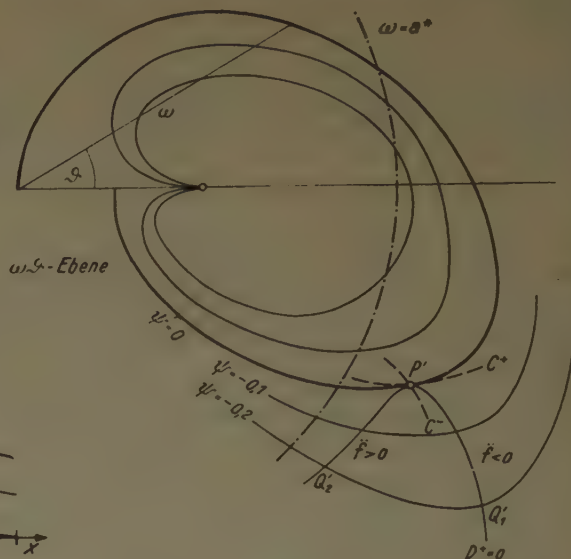


Bild 2

Literatur

- [1] W. TOLLMEN, Zum Übergang von Unterschall- in Überschallströmungen. ZAMM 17 (1937), S. 117—136.
- [2] W. TOLLMEN, Grenzlinien adiabatischer Potentialströmungen. ZAMM 21 (1941), S. 140—152.
- [3] J. W. CRAGGS, The Breakdown of the Hodograph Transformation for Irrotational Compressible Fluid Flow in Two Dimensions. Proc. Cambridge Phil. Soc. 44 (1948), S. 360—379.
- [4] H. GEIRINGER, Grenzlinien der Hodographentransformation. Math. Zeitschr. 63 (1956), S. 514—524.
- [5] E. SCHINCKE, Berechnung von symmetrischen Profilströmungen mit beschränkten Überschallbereichen. ZAMM 39 (1959), S. 437—440.

Anschrift: Dr. ERICH SCHINCKE, Halle (Saale), Händelstraße 11

Beitrag zum Problem der Verzweigungsströmung an einem Kanal mit seitlichen Schlitten *)

Von C. SCHRECK

In der Lüftungstechnik werden Kanäle verwendet, aus denen Luft durch seitliche Schlitten in einen Raum geleitet wird. Bei Vernachlässigung der Flüssigkeitsreibung muß, der Konstanz der Gesamtenergie wegen, die Luft aus allen Schlitten mit gleicher Geschwindigkeit austreten [1]. Die Beobachtung lehrt, daß aus jedem Schlitz trotz gleicher Fläche nicht die gleiche Menge strömt, sondern daß die Teilmengen zum Kanalende hin anwachsen und zwar um so stärker, je größer das Verhältnis der Schlitzfläche zum Kanalquerschnitt ist. Dieser Effekt kann nicht durch die Reibung verursacht werden, die gerade die umgekehrte Verteilung hervorrufen würde, sondern es liegt nahe, die Erklärung in einer von Schlitz zu Schlitz abnehmenden Kontraktion der abzweigenden Strahlen zu suchen. Zur Prüfung dieser Hypothese wird ein einzelner Schlitz in dem einfachen Fall einer ebenen Potentialströmung untersucht.

Die komplexe Strömungsfunktion

Bild 1 zeigt in der z -Ebene die Berandung von Kanal und Schlitz mit dem Verlauf des freien Strahls. In Anlehnung an technische Ausführungen ist ein Ablenkblech CD vorgesehen, das den Zweigstrom aufrichten soll. Die Verzweigungsstromlinie habe in C einen Staupunkt. Zwar sind Strömungsformen mit einem Staupunkt auf BC oder CD denkbar, sie treten aber in realen

*) Aus dem Hermann Föttinger-Institut für Strömungstechnik, Technische Universität Berlin

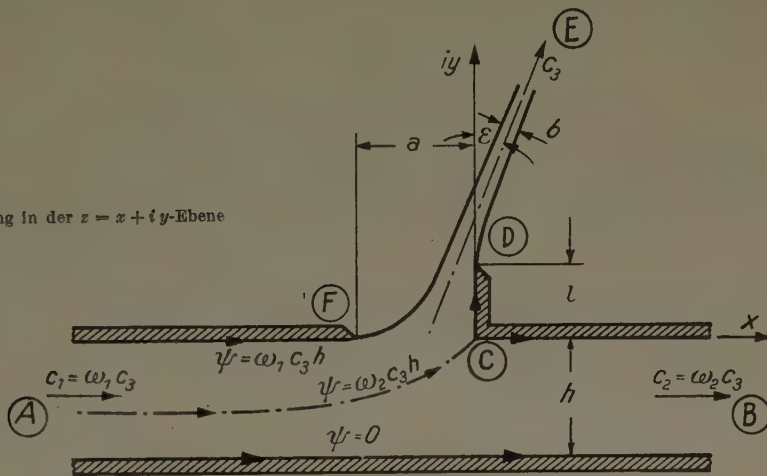
Flüssigkeiten nicht auf. Qualitative Überlegungen lassen vermuten, daß Strömungen mit diesen variierten Verzweigungsstromlinien labil sind; das aber konnte nicht exakt nachgewiesen werden.

Bild 2 zeigt den Hodographen in der Ebene der konjugiert komplexen, dimensionslosen Geschwindigkeit $\bar{\omega} = \bar{c}/c_3$. Spiegelt man die Figur an den beiden Achsen, so erhält man ein Stromlinienbild im Einheitskreis, dessen komplexes Strömungspotential w als Funktion von $\bar{\omega}$ unmittelbar angegeben werden kann. Dazu muß man die Quelle in A (Ergiebigkeit: $2\omega_1 c_3 h$) und die Senke in B ($-2\omega_2 c_3 h$) an der imaginären Achse und am Einheitskreis und die Senke in E ($-2(\omega_1 - \omega_2) c_3 h$) an beiden Achsen spiegeln. Man erhält:

$$w = \frac{c_3 h}{\pi} \left\{ \omega_1 \left[\log(\bar{\omega}^2 - \omega_1^2) + \log\left(\bar{\omega}^2 - \frac{1}{\omega_1^2}\right) \right] - \omega_2 \left[\log(\bar{\omega}^2 - \omega_2^2) + \log\left(\bar{\omega}^2 - \frac{1}{\omega_2^2}\right) \right] - (\omega_1 - \omega_2) [\log(\bar{\omega}^2 - 2\bar{\omega} \sin \varepsilon + 1) + \log(\bar{\omega}^2 + 2\bar{\omega} \sin \varepsilon + 1)] + i\pi\omega_2 \right\} \quad \text{für:} \quad (1)$$

$$\bar{\omega} \leq e^{-i\varepsilon}; \quad 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2};$$

$$0 \leq \omega_2 \leq \omega_1 < 1; \quad 0 \leq \varepsilon < \frac{\pi}{2}$$

Bild 1. Strömung in der $z = x + iy$ -Ebene

Die Konstante wurde so gewählt, daß das Potential in C und die Stromfunktion längs AB Null wird. Mit der Beziehung:

$$\frac{dw}{dz} = \bar{c} = \bar{\omega} c_3 \quad \text{folgt} \quad dz = \frac{1}{c_3 \bar{\omega}} \frac{dw}{d\bar{\omega}} d\bar{\omega}$$

und

$$z = -\frac{2h}{\pi} \left[\left(\text{ArTg} \frac{\bar{\omega}}{\omega_1} + \omega_1^2 \text{ArTg} \omega_1 \bar{\omega} \right) - \left(\text{ArTg} \frac{\bar{\omega}}{\omega_2} + \omega_2^2 \text{ArTg} \omega_2 \bar{\omega} \right) - (\omega_1 - \omega_2) \left(\sin \varepsilon \text{ArTg} \frac{2\bar{\omega} \sin \varepsilon}{1 + \bar{\omega}^2} - \cos \varepsilon \text{arctg} \frac{2\bar{\omega} \cos \varepsilon}{1 - \bar{\omega}^2} \right) \right] \quad (2)$$

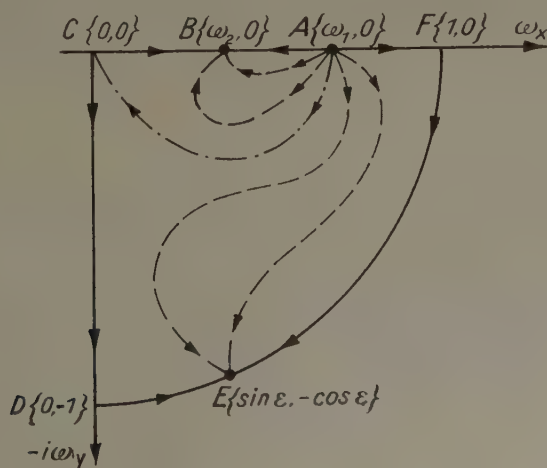


Bild 2. Hodograph der Strömung

Auswertung

Für den Spezialfall unendlicher Ablenkerlänge $C \rightarrow D$, also verschwindender Strahlneigung ε gewinnt man aus Gl. (2):

$$\text{Schlitzbreite } a: \quad \bar{\omega} = \{1, 0\}; \quad z = \{-a, 0\}$$

$$\frac{a}{h} = (\omega_1 - \omega_2) + \frac{2}{\pi} [(1 + \omega_1^2) \operatorname{ArTg} \omega_1 - (1 + \omega_2^2) \operatorname{ArTg} \omega_2] \quad \dots \quad (3)$$

Kontraktionsbeiwert μ :

$$\mu = \frac{b}{a} = \frac{h}{a} (\omega_1 - \omega_2) \quad \dots \quad (4)$$

Die Auswertung beider Gleichungen ist in Bild 3 dargestellt. Das Maximum von μ findet man für $\omega_2 \rightarrow \omega_1 \rightarrow 0$ mit $\frac{\pi}{\pi + 2} = 0,611$ gleich dem Wert, der für den Strahlaustritt aus einem Schlitz in einer ebenen Wand bekannt ist. In das Bild sind zum Vergleich als Punkte Versuchsergebnisse für $a/h = 0,2$; $0,5$ und 1 eingetragen. Die Abweichungen liegen in der Richtung, in der die Wandgrenzschicht im Kanal und die Reibungsverluste des Strahles das Resultat beeinflussen müssen. Ferner ist die Messung für $\omega_2 \approx \omega_1$ als Differenz großer Werte relativ ungenau. In Anbetracht dessen ist die Übereinstimmung befriedigend.

Folgerungen für den Schlitzkanal

Setzt man die Gültigkeit der Rechnung voraus und vernachlässigt eine gegenseitige Beeinflussung der Schlitze, so läßt sich mit Hilfe des Bildes 3 die Mengenverteilung an einem Kanal unmittelbar angeben. Wegen der Konstanz der Gesamtenergie im ganzen Strömungsbereich ist die Austrittsgeschwindigkeit c_3 an allen Schlitzen gleich. Dann aber sind auch die Geschwindigkeiten c_1 und c_2 und die Volumenströme V_1 und V_2 im Kanal vor und hinter jedem Schlitz den

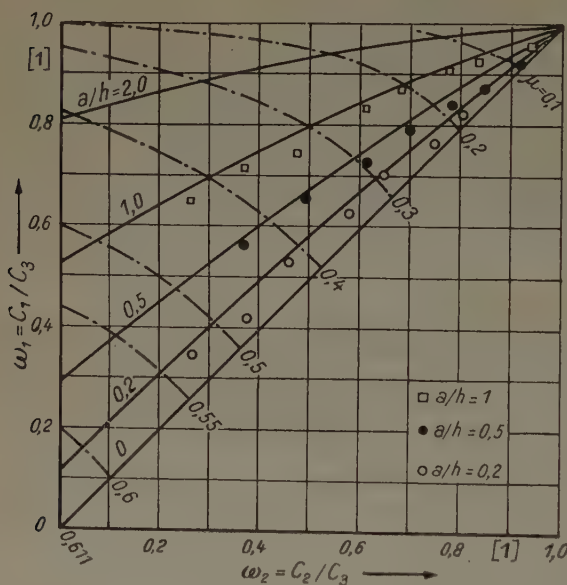


Bild 3

Dimensionslosen ω_1 und ω_2 direkt proportional. In einem Kanal ist nun am Ende die Geschwindigkeit c_2 gleich Null und wächst von Schlitz zu Schlitz an. Aus Bild 3 findet man für jeden Schlitz über der Abszisse $\omega_2 = c_2/c_3$ auf der Parameterkurve des Schlitzverhältnisses a/h erstens die Ordinate ω_1 , die gleich dem ω_2 des vorhergehenden Schlitzes ist, zweitens die Kontraktionszahl μ und drittens den Ordinatenabschnitt $\omega_1 - \omega_2$ zwischen Parameterkurve und Diagonalen, der dem seitlichen Zweigstrom proportional ist. Im Einklang mit der Erfahrung nimmt also zum Kanal Anfang von Schlitz zu Schlitz die abströmende Menge und die Kontraktion zu.

Es sei erwähnt, daß man auch die Vereinigung zweier Teilströme am Einzelschlitz eines Sammelkanals analog als Potentialströmung behandeln kann. Das Ergebnis hat aber nur geringe praktische Bedeutung, weil die Voraussetzung konstanter Gesamtenergie in beiden Teilströmen bei realen Flüssigkeiten auch nicht näherungsweise erfüllt ist.

Literatur

- [1] H. REICHARDT und W. TOLLMIE, Die Verteilung der Durchflußmenge in einem ebenen Verzweigungssystem. Mitteilungen aus dem Max-Planck-Institut für Strömungsforschung Nr. 7, Göttingen (1952).

Anschrift: Dr.-Ing. C. SCHBECK, Berlin NW 87, Altonaer Str. 9

Eine neuartige Konvektionsströmung

Von JÜRGEN ZIEREP*)

Die BÉNARDSchen Zellularströmungen in einem zähen wärmeleitenden Medium über einer gleichmäßig erwärmten Grundfläche sind weitgehend von der Theorie behandelt worden. Dagegen wurde die ungleichmäßige Erwärmung der Bodenfläche bisher nicht betrachtet. Dieser Fall spielt aber gerade insofern eine große Rolle als bei allen Experimenten im Labor und natürlich erst recht bei allen ähnlich verlaufenden Strömungen in der Atmosphäre die ungleichmäßige Erwärmung der Bodenfläche den Regelfall darstellt, während die gleichmäßige Erwärmung einen ganz speziellen Sonderfall bildet.

Die analytische Behandlung des allgemeineren Strömungsproblems läßt sich ähnlich wie in dem von RAYLEIGH und JEFFREYS behandelten Fall der konstanten Temperatur der Grundfläche durchführen. Der einzige Unterschied ist, daß jetzt die Temperaturverteilung des vorkonvektiven bewegungslosen Zustandes im allgemeinen recht kompliziert wird und dadurch die Lösung des Konvektionsproblems wesentlich erschwert werden kann. In dem Spezialfall, daß man die Temperatur der Grundfläche stückweis konstant und die Deckflächentemperatur konstant wählt, gelingt es, die Bestimmung der Strömung sowohl im zweidimensionalen als auch im rotations-symmetrischen Fall auf ein zweiparametrisches Eigenwertproblem zurückzuführen und dies zu lösen. Es ergeben sich interessante neuartige Strömungstypen, die im Experiment schon wiederholt beobachtet worden sind.

(Ausführliche Veröffentlichung demnächst in der ZAMM).

Anschrift: Doz. Dr. J. ZIEREP, Aachen, Karl-Marx-Allee 100

*) TH-Aachen und Institut für theoretische Gasdynamik der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt e.V.

Herausgeber und Hauptschriftleiter: Prof. Dr.-Ing. habil. H. Heinrich, Dresden-A 27, Friedrich-Hegel-Str. 31. Verlag: Akademie-Verlag GmbH, Berlin W 1, Leipziger Straße 3-4; Fernsprecher: 220441. Postscheckkonto: Berlin 35021. Bestellnummer dieses Heftes: 1009/40/S. Die Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik erscheint monatlich. Bezugspreis: vierteljährlich DM 15,—. Zuzüglich Bestellgeld. Doppelheft DM 10,—. Bezugspreis dieses Heftes: DM 15,—. Abbestellungen können nur bis 4 Wochen vor Quartalsende anerkannt werden, andernfalls wird das folgende Quartal noch geliefert. Veröffentlicht unter Druckgenehmigungs-Nr. 202.100/789/60 des Ministeriums für Kultur, Abt. Literatur u. Buchwesen.

Gesamtherstellung: VEB Druckerei „Thomas Müntzer“ Bad Langensalza (V/12/6) (1). Printed in Germany.

Diesem Heft liegt ein Prospekt des Springer-Verlag, Berlin, bei.

Neuerscheinung

Elektronisches Rechnen und Regeln

Herausgegeben von Prof. Dr. Hans Frühauf, Dr. Wilhelm Kämmerer, Prof. Dr. Helmut Winkler

BAND **1**

Dr. WILHELM KÄMMERER

Ziffernrechenautomaten

1960. VIII, 303 Seiten — 156 Abbildungen, davon 2 auf Falttafeln — zahlreiche Tabellen — gr. 8°
Lederin 29,— DM

Das Werk gibt eine zusammenfassende Darstellung des z. Zt. erreichten Standes auf dem Gebiet der programmgesteuerten Rechenautomaten. Der Stoff wurde dem Charakter eines Lehrbuchs entsprechend nach didaktischen Gesichtspunkten ausgewählt, unter Berücksichtigung der neuesten Ergebnisse. Ausgehend von einer Einführung in die formale Logik werden die durch sie gegebenen Möglichkeiten einer Realisierung der arithmetischen Operationen entwickelt. Eine Erläuterung spezieller ausgewählter Rechenautomaten läßt Einblick in die typischen Baugruppen, ihre Arbeitsweise sowie in die verschiedenen Entwicklungstendenzen gewinnen.

Das Buch ist in erster Linie für die Studierenden der mathematisch-naturwissenschaftlichen und technischen Fachrichtungen an unseren Hoch- und Fachschulen bestimmt.

IN VORBEREITUNG BEFINDET SICH

BAND 2

Prof. Dr. HELMUT WINKLER

Elektronische Analogieanlagen

etwa 296 Seiten — 172 Abbildungen — gr. 8° — Lederin etwa 36,— DM



A K A D E M I E - V E R L A G . B E R L I N

IVO BABUŠKA / KAREL REKTORYS / FRANTIŠEK VYČICHLO †

Mathematische Elastizitätstheorie der ebenen Probleme

Übersetzung aus dem Tschechischen

In deutscher Sprache herausgegeben von Dipl.-Math. Winfried Heinrich

1960. XII, 478 Seiten — 207 Abb. — 1 Falttafel — gr. 8° — Ganzleinen DM 96,—

Das Buch macht den Mathematiker mit einer wichtigen theoretisch-technischen Disziplin vertraut, deren Kenntnis für einige Ingenieurfächer unerlässlich ist, und zeigt andererseits dem Techniker, wie der Mathematiker seine Aufgabe sieht, wie er sie modifiziert, bearbeitet und löst. Die Verfasser behandeln Probleme der ebenen Elastizitätstheorie, welche im wesentlichen Probleme der Lösung der biharmonischen Gleichung für Funktionen zweier Veränderlicher bei verschiedenen Randbedingungen sind. Sie stellen sich das Ziel, die Theorie des biharmonischen Problems und die Methoden zu dessen numerischer Lösung zusammenzufassen, sie zu ergänzen und so einander gegenüberzustellen, daß ihre Struktur erkennbar wird, und aus diesen Vergleichen das maximal mögliche für die numerische Berechnung zu gewinnen ist.

Hervorzuheben ist der mathematisch strenge, systematische Aufbau des Werkes, das über die Analysis und die Elemente der Funktionentheorie hinaus keine besonderen Vorkenntnisse verlangt. Was an weitgehenden mathematischen Hilfsmitteln benötigt wird, ist in dem umfangreichen Anhang zu finden. Die praktische Anwendung der Methoden wird an verschiedenen Beispielen gezeigt. In deutscher Sprache fehlte bisher eine zusammenfassende Darstellung dieses Gebietes.

Bestellungen durch eine Buchhandlung erbeten

A K A D E M I E - V E R L A G . B E R L I N



B. W. GNEDENKO

A. N. KOLMOGOROV

Grenzverteilungen von Summen unabhängiger Zufallsgrößen

Übersetzung aus dem Russischen. Wissenschaftliche Bearbeitung der deutschen Ausgabe:

JOSEF HEINHOLD, München

(Mathematische Lehrbücher und Monographien. II. Abteilung: Mathematische Monographien, Band IX)

1959. VIII, 279 Seiten — 2 Abbildungen — gr. 8° — Ganzleinen DM 44,—

Die klassischen Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung können als Spezialfälle von Grenzwertsätzen angesehen werden, die sich auf Summen unabhängiger Zufallsgrößen beziehen. Im vorliegenden Werk wird systematisch untersucht, unter welchen Bedingungen derartige Summen eine Grenzverteilung besitzen und welche Eigenschaften diese hat, insbesondere unter welchen Bedingungen sich eine Normalverteilung oder eine Poissonsche Verteilung ergibt.

Der erste Abschnitt bringt nach einem ausführlichen Vorwort, in dem die Verfasser eine Übersicht über die in dem Werk behandelten Fragen geben, eine Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung auf maßtheoretischer Grundlage, in die Verteilungen im \mathbb{R}^1 und deren charakteristische Funktionen und in unbeschränkt teilbare Verteilungen. Teil II behandelt sodann Grenzwertsätze allgemein für Summen unabhängiger Summanden, Teil III speziell für identisch verteilte Summanden, wobei insbesondere die Konvergenz gegen die Normalverteilung eingehend dargestellt wird.

Das Buch ist eine vom Mathematischen Forschungsinstitut Berlin besorgte und von J. Heinhold (München) redigierte Übersetzung des bekannten, erstmals 1949 in russischer Sprache erschienenen, inzwischen bereits in die ungarische und englische Sprache übersetzten Werkes gleichen Titels. Die deutsche Ausgabe ist gegenüber der ungarischen und englischen von den Autoren weiter verbessert und ergänzt worden.

Bestellungen durch eine Buchhandlung erbeten



A K A D E M I E - V E R L A G . B E R L I N